Odpovídejte celou větou (na každou otázku) a každé své tvrzení řádně zdůvodněte.

1. [25 bodů] Nechť $\mathbb{R}$ je množina reálných čísel a $S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je binární relace definována následovně
$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\} .$$
Jinými slovy je relace S definována takto:
$$x\ S\ y \text{ právě tehdy, když } x^2 = y^2.$$
   a) [5 bodů] Definujte pojem ekvivalence.
   b) [10 bodů] Rozhodněte, jestli je relace S ekvivalence.
   c) [10 bodů] Pokud ano, najděte třídu ekvivalence S odpovídající prvku 2, tj. $S[2]$. Vyjmenujte všechny prvky, které do $S[2]$ patří.

2. [25 bodů] Je dána formule výrokové logiky α, kde
$$\alpha = (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi) .$$
   a) [5 bodů] Definujte pojem sémantického důsledku.
   b) [5 bodů] Napište větu o dedukci pro výrokovou logiku.
   c) [15 bodů] Pomocí věty o dedukci ukažte, že formule α je tautologie.

3. [25 bodů] Nechť φ je následující formule predikátové logiky
$$\varphi = (\exists x \forall y\, Q(x, y)) \wedge \neg Q(a, b) ,$$
kde a je konstatní symbol a x, y proměnné.
   a) [5 bodů] Nechť ψ je formule predikátové logiky. Napište, jak se definuje pravdivost formulí $\forall x\psi$ a $\exists x\psi$ v dané interpretaci $\langle U, [\![-]\!]\rangle$ a ohodnocení ρ.
   b) [10 bodů] Najděte interpretaci, jejíž univerzum je množina přirozených čísel $\mathbb{N}$, a ve které je sentence φ nepravdivá.
   c) [10 bodů] Je φ kontradikce? Pokud ano, vysvětlete tento fakt, pokud ne, vysvětlete proč ne.

4. [25 bodů] Nechť M je následující množina sentencí
$$M = \{\forall x(P(x) \Rightarrow R(x)),\ \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))\} ,$$
a α sentence
$$\alpha = \forall x(P(x) \Rightarrow (R(x) \wedge Q(x))) .$$
   a) [10 bodů] Pomocí unifikačního algoritmu najděte nejobecnější unifikaci atomických formulí $T(a, x, f(g(y)))$ a $T(y, f(z), f(z))$.
   b) [5 bodů] Najděte ekvisplnitelnou množinu klausulí S pro množinu sentencí M.
   c) [10 bodů] Rezoluční metodou rozhodněte, zda je sentence α sémantickým důsledkem množiny sentecí M, tj. $M \models \alpha$.