Polynomy

1. Nechť f, g jsou polynomy a f není nulový. Najděte polynom h takový, že f dělí polynom $h \circ g$ beze zbytku. Polynom $h \circ g$ vznikne jako složení dvou zobrazení, tj. $(h \circ g)(x) = h(g(x))$.

2. Nechť a, b jsou lichá celá čísla. Dokažte, že polynom $f(x) = x^2 + 2ax + 2b$ nemá žádné racionální kořeny.

3. Nechť $f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ je reálný polynom. Jaký je nejmenší možný počet nenulových koeficientů a_i tak, aby f měl pět navzájem různých reálných kořenů.

4. Reciproký polynom je polynom tvaru $a_nx^n + \cdots + a_0$, kde $a_i = a_{n-i}$, $i = 0, \ldots, n$. Dokažte:

   a) Je-li c kořen reciprokého polynomu $P(x)$, pak $\frac{1}{c}$ je také jeho kořen.

   b) Reciproký polynom lichého stupně má vždy kořen -1.

5. Spočtěte součet koeficientů polynomu $p(x) = (2 - 5x + x^3)^3(3 - 7x + 9x^2 - 5x^3)^4$.

6. Ať $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jsou všechny kořeny polynomu $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, $a_n \neq 0$. Spočtěte součin všech kořenů $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n$.

7. Ukažte, že dvojnásobný kořen polynomu $p(x)$ je také kořenem jeho derivace $p'(x)$.

Matice

1. Jak vypadají matice, které komutují se všemi maticemi? [Návod: zkuste násobit zkoumané matice s „řídkými“ maticemi (maticemi, které mají hodně nul).]

2. Symetrická matice je matice splňující $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

   a) Rozhodněte, zda platí: pro symetrickou matici $\mathbf{A}$ je $\mathbf{A}^2$ také symetrická.

   b) Za jaké podmínky platí: jsou-li $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ symetrické matice, potom $\mathbf{AB}$ je také symetrická.

3. Rozhodněte, zda platí: když $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, pak $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. Pokud tvrzení neplatí obecně, najděte podmínku pro matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, za které by tvrzení platilo.

4. Čtvercová matice $\mathbf{A}$ se nazývá ortogonální, pokud $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$. Rozhodněte, kdy je diagonální matice ortogonální.

5. Dokažte, že neplatí vzorec $\det(A + B) = \det A + \det B$. Odvoďte správný vzorec pro výpočet $\det(A + B)$, ve kterém by se objevil $\det A$ a $\det B$.

   [Návod: Použijte opakovaně pravidlo pro rozvoj determinantu podle řádku.]

6. Spočtěte

$$W_{a,b,c,d} = \det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix}$$

   Determinant matice tohoto tvaru se nazývá Wandermondův determinant pro a, b, c, d. Odvoďte rekurzivní vztah pro výpočet $W_{x_1,\ldots,x_n}$ pomocí $W_{x_1,\ldots,x_{n-1}}$. Navrhněte, jak bude vypadat vzorec pro nerekurzivní výpočet $W_{x_1,\ldots,x_n}$ (můžete ho ověřit matematickou indukcí).

   [Návod: Pokuste se téměř vynulovat poslední řádek matice tím, že budete šikovně sčítat či odčítat sloupce.]

7. Spočtěte determinant matice $\mathbf{A}$ typu $n \times n$, která má na diagonále všude $a \in \mathbf{R}$ a všude jinde má $b \in \mathbf{R}$.