1 Predikátová logika

1.1 Syntax

Podobně jako ve výrokové logice začneme nejprve se syntaxí predikátové logiky, která nám říká, co jsou správně utvořené formule predikátové logiky. V další části tohoto textu si pak vysvětlíme, jaký mohou mít formule význam (sémantiku).

Definice 1.1 *Jazyk* predikátové logiky $\mathcal{L}$ se skládá z následujících částí:

1. Logických symbolů:
   - spočetné množiny objektových proměnných $\mathsf{Var} = \{x, y, z, \ldots\}$,
   - výrokových logických spojek $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$,
   - obecného (univerzálního) kvantifikátoru $\forall$ a existečního kvantifikátoru $\exists$,
2. Speciálních (mimologických) symbolů:
   - množiny predikátových symbolů $\mathcal{R} = \{P, Q, R, \ldots\}$,
   - množiny konstatních symbolů $\mathcal{C} = \{a, b, c, \ldots\}$,
   - množiny funkčních symbolů $\mathcal{F} = \{f, g, h, \ldots\}$,
3. Pomocných symbolů: závorky a čárka.

Každý predikátový a funční symbol má danou aritu (četnost). Tyto symboly tedy mohou být unární, binární, ternární atd. Obecně mluvíme o n-arním predikátovém nebo funkčním symbolu.

Dodejme, že jazyků predikátové logiky je mnoho. Výběr konkrétního jazyka závisí na tom, co chceme predikátovou logikou formalizovat. Nicméně logické a pomocné symboly jsou u každého jazyka stejné. Liší se tedy jen ve speciálních symbolech. Proto budeme zkráceně jazyk $\mathcal{L}$ zapisovat jako množinu speciálních symbolů, tj. $\mathcal{L} = \mathcal{R} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{F}$. Např. pokud chceme formalizovat vlastnosti reálných čísel, může náš jazyk vypadat třeba takto $\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0, 1, =, \leq\}$, kde $+, \cdot$ jsou binární funkční symboly, $\leq, =$ jsou binární predikátové symboly a $0, 1$ jsou konstantní symboly.

Než budeme definovat pojem formule v predikátové logice, musíme nadefinovat pojem termu.

Definice 1.2 Množina $\mathcal{L}$-*termů* jazyka $\mathcal{L}$ je definována těmito pravidly:

1. Každá proměnná a každý konstatní symbol je term.
2. Jestliže f je funkční symbol arity n a $t_1, \ldots, t_n$ jsou termy, pak $f(t_1, \ldots, t_n)$ je také term.
3. Nic, co nevzniklo konečným použitím 1 a 2, není term.

Pokud bude jazyk $\mathcal{L}$ jasný z kontextu, budeme místo o $\mathcal{L}$-termech mluvit jen o termech.

Mejmě jazyk $\mathcal{L}$ obsahující unární funkční symbol f, binární funkční symbol $+$ a konstantní symbol 0. Pak následující jsou příklady $\mathcal{L}$-termů:

- $x + 0$ (místo $+(x, y)$ píšeme $x + y$),
- $0 + (0 + (0 + 0))$,
- $f(f(x) + f(0 + 0))$.

Nyní již můžeme nadefinovat pojem formule. Začneme s atomickými formulemi, které si lze představit jako základní formule, z kterých budeme budovat složitější formule použitím logických spojek a kvantifikátorů.

Definice 1.3 Nechť $\mathcal{L}$ je jazyk. Atomická $\mathcal{L}$-formule je predikátový symbol P aplikovaný na tolik termů, kolik je jeho arita. Tj. pro n-ární $P \in \mathcal{R}$ a termy $t_1, \dots, t_n$ je $P(t_1, \dots, t_n)$ atomická $\mathcal{L}$-formule.

Definice 1.4 Nechť $\mathcal{L}$ je jazyk. Množina *$\mathcal{L}$-formulí* je definována těmito pravidly:

1. Každá atomická $\mathcal{L}$-formule je $\mathcal{L}$-formule.
2. Jsou-li φ a ψ dvě $\mathcal{L}$-formule, pak $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ jsou opět $\mathcal{L}$-formule.
3. Je-li φ $\mathcal{L}$-formule a x proměnná, pak $(\forall x\varphi)$ a $(\exists x\varphi)$ jsou opět $\mathcal{L}$-formule.
4. Nic, co nevzniklo konečným použitím 1 až 3, není formule.

Pokud bude jazyk $\mathcal{L}$ jasný z kontextu, budeme místo o $\mathcal{L}$-formulích mluvit jen o formulích.

Podobně jako ve výrokové logice budeme některé závorky v zápisu formulí vynechávat. Předně budeme opět vynechávat vnější závorky. Dále v případech, kdy budou chybět závorky, budeme předpokládat, že symboly $\neg, \forall, \exists$ mají větší prioritu než $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Takže například $\forall y P(x,y) \Rightarrow Q(x,y)$ znamená $((\forall y P(x,y)) \Rightarrow (Q(x,y)))$.

Dále pořadí symbolů $\neg, \forall, \exists$ ve formuli určuje pořadí v jakém se aplikují. Například píšeme $\exists x \neg \forall y \exists z R(x,y,z)$ místo $(\exists x(\neg(\forall y(\exists z(R(x,y,z))))))$.

Definice 1.5 Nechť φ je formule. Pojem *podformule* budeme definovat induktivně následovně:

1. Pokud je φ atomická formule, pak α je podformule φ právě tehdy, když $\alpha = \varphi$.
2. Pokud $\varphi = \neg\psi$, pak α je podformule φ právě tehdy, když $\alpha = \varphi$ nebo α je podformulí ψ.
3. Pokud $\varphi = \psi \diamond \chi$ pro $\diamond \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, pak α je podformule φ právě tehdy, když $\alpha = \varphi$ nebo α je podformulí ψ nebo α je podformulí χ.
4. Pokud $\varphi = Qx\psi$ pro $Q \in \{\forall, \exists\}$, pak α je podformule φ právě tehdy, když $\alpha = \varphi$ nebo α je podformulí ψ.

Příklad 1.6 Nechť φ je formule $\exists x \forall y P(x,y) \vee \forall x \exists y Q(x,y)$, kde P a Q jsou binární predikátové symboly. Podformule φ jsou $\exists x \forall y P(x,y)$, $\forall y P(x,y)$, $P(x,y)$, $\forall x \exists y Q(x,y)$, $\exists y Q(x,y)$, $Q(x,y)$ a φ sama. Všiměte si, že formule $P(x,y) \vee \forall x \exists y Q(x,y)$, která se vyskytuje jako část φ, není podformule φ.

Definice 1.7 Mějme formuli φ a proměnnou x, která se vyskytuje ve φ.

- Výskyt proměnné x je *vázaný* ve φ, jestliže se x vyskytuje v nějaké podformuli formule φ tvaru $\exists x\psi$ nebo $\forall x\psi$.
- V opačném případě mluvíme o *volném* výskytu.

Příklad 1.8 Uvažujme formuli v jazyku s unárním funčním symbolem f, binárním funkčním symbolem $+$ a binárními predikátovými symboly $<, =$

$$\exists x(x < y \ \wedge\ \forall y(z + f(y) = x))\,.$$

- výskyt proměnné z je volný,
- všechny tři výskyty proměnné x jsou vázané,
- proměnná y má první výskyt volný a druhé dva vázané.

Definice 1.9 Nechť φ je formule.

- Pokud má formule φ pouze vázané výskyty proměnných, pak se nazývá *sentence* (uzavřená formule).
- Pokud má formule φ pouze volné výskyty proměnných, pak se nazývá *otevřená formule*.

Příklad 1.10
- $\forall z \forall y \exists x (x < y \ \wedge \ \forall y(z + f(y) = x))$ je sentence,
- $x < y \ \wedge \ (z + f(y) = x)$ je otevřená formule,
- $\exists x(x < y \ \wedge \ \forall y(z + f(y) = x))$ není ani uzavřená ani otevřená,
- $0 < f(f(0))$ je uzavřená i otevřená.

Definice 1.11 Nechť φ je formule jejíž proměnné, které mají volné výskyty, jsou mezi $x_1, \dots, x_n$. Pak φ budeme značit $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. Mějme termy $t_1, \dots, t_n$. Pak $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ označuje formuli, kde je každý volný výskyt proměnné x_i nahrazen termem t_i.

Kdykoliv budeme tuto notaci používat, budeme vždy předpokládat, že žádný z termů t_i neobsahuje proměnnou, která má vázaný výskyt ve φ. Např. když $\varphi(x)$ je $\exists y \neg(x = y)$, pak není dovolené psát $\varphi(y)$. Důvod této konvence bude patrný později.

Pokud $\varphi(x, y)$ je např. $\exists z(x + y < z)$, $t_1 = 0$ a $t_2 = f(0) + y$, pak $\varphi(0, f(0) + y)$ označuje formuli $\exists z(0 + (f(0) + y) < z)$.

1.2 Sémantika

Definice 1.12 Mějme jazyk $\mathcal{L} = \mathcal{R} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{F}$. *Struktura pro jazyk* $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$-struktura) je neprázdná množina A (*universum*) spolu se zobrazením $[\![-]\!]$, které splňuje následující body:

1. každému predikátovému symbolu $P \in \mathcal{R}$ arity n přiřazuje podmnožinu $[\![P]\!]$ množiny A^n, tj. n-ární relaci na množině A,
2. každému konstatnímu symbolu $a \in \mathcal{C}$ přiřazuje prvek $[\![a]\!]$ z A,
3. každému funkčnímu symbolu $f \in \mathcal{F}$ arity n přiřazuje zobrazení $[\![f]\!] \colon A^n \to A$.
4. Pokud máme v $\mathcal{R}$ symbol $=$, pak $[\![=]\!] = \{(a, a) \mid a \in A\}$.

Příklad 1.13 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ s binárním predikátovým symbolem H, konstatním symbolem 0. $\mathcal{L}$-struktura je např. dvojice $\langle A, [\![-]\!]\rangle$, kde $A = \{a, b, c, d\}$, $[\![0]\!] = c$,

$$[\![H]\!] = \{(a, b), (a, c), (b, c), (c, d), (d, a), (d, b)\} .$$

$\mathcal{L}$-struktury budeme zkráceně označovat tučnou variantou téhož písmene, kterým je označeno universum. Dále místo interpretace $[\![P]\!]$ ve struktuře $\mathbf{A}$ pro $P \in \mathcal{L}$ budeme psát $P^{\mathbf{A}}$. Pokud je jazyk $\mathcal{L}$ konečný, budeme strukturu zapisovat jako n-tici. Např. pro strukturu z příkladu nahoře:

$$\mathbf{A} = \langle A, H^{\mathbf{A}}, 0^{\mathbf{A}}\rangle .$$

Příklad 1.14 Mějme jazyk $\mathcal{L}$ s binárními predikáty $\leq, =$, binárními funkčními symboly $+, \cdot$ a dvěmi konstantami $0, 1$. $\mathcal{L}$-struktura je např. $\mathbf{R} = \langle \mathbb{R}, +^{\mathbf{R}}, \cdot^{\mathbf{R}}, 0^{\mathbf{R}}, 1^{\mathbf{R}}, \leq^{\mathbf{R}}\rangle$, kde $\leq^{\mathbf{R}}$ je interpretováno jako binární relace “menší nebo rovno” na reálných číslech, tj. $\leq^{\mathbf{R}}$ je množina $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \text{ je menší nebo rovno } b\}$, $0^{\mathbf{R}}$ se realizuje jako reálné číslo nula, $1^{\mathbf{R}}$ se realizuje jako reálné číslo jedna, $+^{\mathbf{R}}$ se interpretuje jako sčítání reálných čísel a $\cdot^{\mathbf{R}}$ se interpretuje jako násobení reálných čísel. Strukturu $\mathbf{R}$ budeme nazývat struktura reálných čísel.

Predikátový symbol $=$ se v zápisu $\mathbf{R} = \langle \mathbb{R}, +^{\mathbf{R}}, \cdot^{\mathbf{R}}, 0^{\mathbf{R}}, 1^{\mathbf{R}}, \leq^{\mathbf{R}}\rangle$ často vynechává, protože kdykoliv se objeví v nějaké formuli je jeho interpretace vždy stejná viz Definice 1.12.

V případech, jako je tento, kdy mají symboly $+, \cdot, 0, 1, \leq$ “obvyklý” význam, si dovolíme nedůslednost a budeme psát $\mathbf{R} = \langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq\rangle$.

Když máme definován pojem struktury, můžeme definovat pojem pravdivosti formule ve struktuře. Zaměříme se na sentence, protože ptát se, jestli platí např. atomická formule $x+y<1$ nemá smysl. Nicméně má smysl se ptát, jestli např. platí sentence $\forall x \exists y (x+y<1)$. Nejprve však musíme říct, jak se počítá hodnota termu.

Definice 1.15 Mějme strukturu $\mathbf{A}$ a t term bez proměnných (tj. obsahuje jen konstanty a funkční symboly). Pak jeho hodnotu $t^{\mathbf{A}}$ v $\mathbf{A}$ definujeme takto:

- Je-li term t konstatní symbol $c \in \mathcal{C}$, pak jeho hodnota je $t^{\mathbf{A}} = c^{\mathbf{A}}$.
- Je-li $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ pro $f \in \mathcal{F}$ a t_i termy, pak jeho hodnota je $t^{\mathbf{A}} = f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}, \ldots, t_n^{\mathbf{A}})$.

Příklad 1.16 Nechť $\mathbf{R}$ je struktura reálných čísel z příkladu 1.14 a $t = (1+1)\cdot(1+(1+0))$. Pak $t^{\mathbf{R}} = 4$.

Nyní již můžeme definovat pojem pravdivosti. Nechť $\mathbf{A}$ je $\mathcal{L}$-struktura. Budeme induktivně definovat pravdivost $\mathcal{L}$-sentence φ ve struktuře $\mathbf{A}$. Značení $\mathbf{A} \models \varphi$. V opačném případě budeme psát $\mathbf{A} \not\models \varphi$.

Začneme definicí pro atomickou sentenci $\varphi = P(t_1, \ldots, t_n)$. Protože φ je sentence a neobsahuje žádné kvantifikátory, nemůže obsahovat žádné proměnné. Tudíž můžeme spočítat hodnoty $t_i^{\mathbf{A}}$ podle Definice 1.15. Má smysl tedy definovat $\mathbf{A} \models \varphi$ právě tehdy, když $(t_1^{\mathbf{A}}, \ldots, t_n^{\mathbf{A}}) \in P^{\mathbf{A}}$.

Dále si ukážeme, jak definovat provadivost pro složitější sentence v závislosti na jejích podformulích.

- Nechť $\varphi = \neg\psi$. Pak $\mathbf{A} \models \varphi$ právě tehdy, když $\mathbf{A} \not\models \psi$ (tj. ψ je nepravdivá v $\mathbf{A}$).
- Nechť $\varphi = \psi \wedge \chi$. Pak $\mathbf{A} \models \varphi$ právě tehdy, když $\mathbf{A} \models \psi$ a $\mathbf{A} \models \chi$.
- Nechť $\varphi = \psi \vee \chi$. Pak $\mathbf{A} \models \varphi$ právě tehdy, když $\mathbf{A} \models \psi$ nebo $\mathbf{A} \models \chi$.
- Nechť $\varphi = \psi \Rightarrow \chi$. Pak $\mathbf{A} \not\models \varphi$ právě tehdy, když $\mathbf{A} \models \psi$ a $\mathbf{A} \not\models \chi$.
- Nechť $\varphi = \psi \Leftrightarrow \chi$. Pak $\mathbf{A} \models \varphi$ právě tehdy, když buď $\mathbf{A} \models \psi$ a $\mathbf{A} \models \chi$ nebo $\mathbf{A} \not\models \psi$ a $\mathbf{A} \not\models \chi$.

Poslední, co zbývá je nadefinovat pravdivost sentencí tvaru $\varphi = \forall x\psi$ a $\varphi = \exists x\psi$. Pokud ψ neobsahuje volný výskyt proměnné x, pak definujeme $\mathbf{A} \models \varphi$ právě tehdy, když $\mathbf{A} \models \psi$. V ostatních případech rozšíříme náš jazyk $\mathcal{L}$ tak, aby obsahoval konstantní symboly pro všechny prvky universa A.

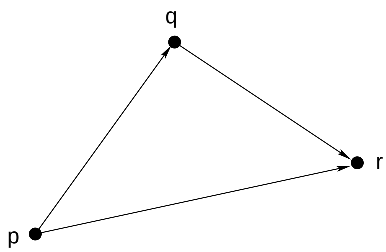
Definice 1.17 Nechť $\mathcal{L}$ je jazyk a $\mathbf{A}$ je $\mathcal{L}$-struktura. Pak $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$ je jazyk, který vznikne z $\mathcal{L}$ přidáním konstatních symbolů pro každý prvek A, tj. $\mathcal{L}_{\mathbf{A}} = \mathcal{L} \cup \{c_a \mid a \in A\}$. Symbolem $\mathbf{A}_C$ pak označujeme $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$-strukturu, která vznikne z $\mathbf{A}$ interpretací $[\![c_a]\!] = a$. Symboly c_a, a budeme občas ztotožňovat.

Pravdivost sentence φ nyní můžeme definovat pomocí pravdivosti v $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$-struktuře $\mathbf{A}_C$. Nechť $\varphi = \forall x\psi(x)$. Pak $\mathbf{A} \models \varphi$ právě tehdy, když pro všechny $a \in A$ platí $\mathbf{A}_C \models \psi(c_a)$. Pokud $\varphi = \exists x\psi(x)$. Pak $\mathbf{A} \models \varphi$ právě tehdy, když existuje $a \in A$ takové, že $\mathbf{A}_C \models \psi(c_a)$.

Pojem pravdivosti sentence ve struktuře $\mathbf{A}$ rozšíříme na formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, co nejsou sentencemi tak, že z nich sentence uděláme. Definujeme $\mathbf{A} \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ právě tehdy, když $\mathbf{A} \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Příklad 1.18 Nechť $\mathcal{L} = \{R\}$, kde R je binární predikát. Uvažujme $\mathcal{L}$-strukturu $\mathbf{A} = \langle A, R^{\mathbf{A}} \rangle$, kde $R^{\mathbf{A}} = \{(p,q),(p,r),(q,r)\}$. Určete, jestli

1. $\mathbf{A} \models \neg\exists x\, R(x,x)$,
2. $\mathbf{A} \models \forall x \forall y \forall z((R(x,y) \wedge R(y,z)) \Rightarrow R(x,z))$.



Obrázek 1: Relace $R^{\mathbf{A}}$ na množině A.

Řešení Struktura $\mathbf{A}$ se skládá z nosné množiny A a binární relace $R^{\mathbf{A}}$. Můžeme si ji tedy zobrazit jako orientovaný graf.

1. Podle definice pravdivosti máme, že $\mathbf{A} \models \neg\exists x\, R(x,x)$ právě tehdy, když $\mathbf{A} \not\models \exists x\, R(x,x)$. Takže musíme zjistit, jestli je sentence $\exists x\, R(x,x)$ nepravdivá v $\mathbf{A}$. Opět podle definice pravdivosti to znamená, že neexistuje $a \in A$ takové, že $(a,a) \in R^{\mathbf{A}}$. Inspekcí prvků $R^{\mathbf{A}}$ zjistíme, že takové a skutečně neexistuje, a tudíž $\mathbf{A} \models \neg\exists x\, R(x,x)$.

   Neformálně řečeno nám sentence $\neg\exists x\, R(x,x)$ říká, že ve výše uvedeném grafu neexituje žádný bod, ze kterého by vedla šipka do něho samotného.

2. Podle definice pravdivosti máme, že $\mathbf{A} \models \forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \Rightarrow R(x,z))$ právě tehdy, když pro všechna $a,b,c \in A$ platí $\mathbf{A}_C \models (R(a,b) \wedge R(b,c)) \Rightarrow R(a,c)$. Jelikož implikace je neplatná jen v případech, kdy platí předpoklad a neplatí závěr, stačí zjistit, jestli tento případ může nastat. Předpoklad $R(a,b) \wedge R(b,c)$ lze splnit jedině tak, že $a = p$, $b = q$ a $c = r$. V tomto případě ale platí i závěr $R(a,c)$, protože $(p,r) \in R^{\mathbf{A}}$. Z toho vyplývá, že implikaci nelze učinit nepravdivou, takže $\mathbf{A} \models \forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \Rightarrow R(x,z))$.

   Zkráceně řečeno sentence $\forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \Rightarrow R(x,z))$ říká, že relace $R^{\mathbf{A}}$ je tranzitivní, což je opět z obrázku dobře patrné.

Příklad 1.19 Nechť φ je sentence $\forall x \exists y (x = y + y)$. Uvažujme strukturu $\mathbf{R} = \langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq \rangle$ a podobně strukturu celých čísel $\mathbf{Z} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1, \leq \rangle$, kde symboly $+, \cdot, 0, 1, \leq$ mají běžný význam. Rozhodněte jestli platí následující tvrzení:

1. $\mathbf{R} \models \varphi$,
2. $\mathbf{Z} \models \varphi$.

Řešení Připomeňme, že symbol $=$ je v každé struktuře interpretován jako identická relace na nosné množině, tj. jako rovnost.

1. Sentence φ je pravdivá ve struktuře $\mathbf{R}$ právě tehdy, když pro všechna $a \in \mathbb{R}$ existuje $b \in \mathbb{R}$ takové, že $a = b + b$. To jistě pro reálná čísla platí, protože můžeme za b vzít prvek $a/2 \in \mathbb{R}$. Z toho plyne, že $\mathbf{R} \models \varphi$.

2. Pro strukturu $\mathbf{Z}$ postupujeme podobně. Tady ovšem vidíme, pro některá $a \in \mathbb{Z}$ nemusí existovat $b \in \mathbb{Z}$ takové, že $a = b + b$. Např. pro $a = 3$. Vhodné b existuje, jen pokud je a dělitelné dvěmi. Z toho plyne, že $\mathbf{Z} \not\models \varphi$.

Definice 1.20 Nechť $\mathcal{L}$ je jazyk, φ je $\mathcal{L}$-formule a $\mathbf{A}$ je $\mathcal{L}$-struktura. Pokud $\mathbf{A} \models \varphi$, pak nazýváme $\mathbf{A}$ *model* φ.

Podobně pokud M je množina $\mathcal{L}$-formulí, pak $\mathbf{A}$ nazýváme *model* M, pokud pro všechny $\psi \in M$ platí $\mathbf{A} \models \psi$.

Definice 1.21 Nechť $\mathcal{L}$ je jazyk a φ je $\mathcal{L}$-formule. Pak

- φ nazýváme *tautologií*, pokud $\mathbf{A} \models \varphi$ pro každou $\mathcal{L}$-strukturu $\mathbf{A}$ (tj. každé $\mathbf{A}$ je model φ),
- φ nazýváme *splnitelnou*, pokud existuje $\mathcal{L}$-struktura $\mathbf{A}$ taková, že $\mathbf{A} \models \varphi$ (tj. existuje model φ),
- φ nazýváme *nesplnitelnou (kontradikcí)*, pokud neexistuje $\mathcal{L}$-struktura $\mathbf{A}$ taková, že $\mathbf{A} \models \varphi$ (tj. neexistuje model φ).

Definice 1.22 Nechť $\mathcal{L}$ je jazyk a M je množina $\mathcal{L}$-formulí. Pak

- M nazýváme *splnitelnou*, pokud existuje model M,
- M nazýváme *nesplnitelnou*, pokud neexistuje model M.

Definice 1.23 Nechť $\mathcal{L}$ je jazyk. Řekneme, že $\mathcal{L}$-sentence φ je sémantickým důsledkem (konsekventem) množiny $\mathcal{L}$-sentencí S, pokud každý model množiny S je také modelem sentence φ. Značíme $S \models \varphi$. Místo $\{\psi\} \models \varphi$ píšeme $\psi \models \varphi$ a místo $\emptyset \models \varphi$ píšeme $\models \varphi$.

Poznámka 1.24 V predikátové logice má symbol $\models$ více významů. Výše definovaný význam je analogický s význanem $\models$ ve výrokové logice. Druhý význam je význam pravdivosti formule ve struktuře.