1 Relace a mohutnost

Příklad 1.1 Minule jsme si ukázali, že binární relace $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definovaná

$$x \; R \; y \text{ právě tehdy, když existuje } k \in \mathbb{Z} \text{ takové, že } x - y = 3k\,,$$

je ekvivalence na množině celých čísel $\mathbb{Z}$. Popište třídy ekvivalence $R[2], R[-2], R[11]$ odpovídající číslu 2.

Podle definice třídy ekvivalence máme:

$$R[2] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \; R \; 2\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.ž. } x - 2 = 3k\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.ž. } x = 2 + 3k\}\,,$$

$$R[2] = \{\ldots, -10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, \ldots\}\,.$$

Podobně

$$R[-2] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \; R \; -2\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.ž. } x-(-2) = 3k\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.ž. } x = -2+3k\}\,,$$

$$R[-2] = \{\ldots, -14, -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, \ldots\}\,.$$

Podobně bychom mohli popsat i $R[11]$. Nicméně tady můžeme dostat výsledek okamžitě. Všiměte si, že $11 \in R[2]$. Z toho plyne, že $R[2] \cap R[11] \neq \emptyset$. Protože víme, že třídy ekvivalence jsou po dvou disjuktní, musí nutně platit, že $R[2] = R[11]$.

Příklad 1.2 Zjistěte, jestli je následující binární relace $R \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ ekvivalence. Popište třídu ekvivalence $R[(1,1)]$.

$$(x, y) \; R \; (u, v) \text{ právě tehdy, když } x + y - u - v = 0\,.$$

Ověříme, reflexivitu, symetrii a tranzitivitu.

1. Reflexivita: Mějme libovolný prvek $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Protože $x+y-x-y = 0$, platí $(x, y) \; R \; (x, y)$. Relace je tudíž reflexivní.

2. Symetrie: Mějme dva prvky $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ takové, že $(x, y) \; R \; (u, v)$. Z definice relace R to znamená, že $x+y-u-v = 0$. Pokud tuto rovnici vynásobíme -1, dostaneme $u+v-x-y = 0$. Tudíž máme $(u, v) \; R \; (x, y)$ a relace je tedy symetrická.

3. Tranzitivita: Mějme tři prvky $(x, y), (u, v), (a, b) \in \mathbb{R}^2$ takové, že $(x, y) \; R \; (u, v)$ a $(u, v) \; R \; (a, b)$. Z definice R dostaneme, že platí rovnosti $x + y - u - v = 0$ a $u + v - a - b = 0$. Sečtením těchto rovností získáme $x + y - a - b = 0$. Tudíž máme $(x, y) \; R \; (a, b)$ a relace je tedy tranzitivní.

Podle definice třídy ekvivalence máme:

$$R[(1,1)] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \; R \; (1, 1)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y-1-1 = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2-x\}\,.$$

Vidíme tedy, že třída ekvivalence $R[(1,1)]$ je tvořena body (x, y), které splňují rovnici $y = 2 - x$. Jedná se tedy o přímku, která prochází body $(0, 2)$ a $(2, 0)$.

Příklad 1.3 Ověřte, že následující binární relace R na množine $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ je uspořádání. Nakreslete Hasseův diagram a najděte největší, maximální, nejmenší a minimální prvky.

$$x \; R \; y \text{ právě tehdy, když } x|y\,,$$

kde $x|y$ vyjadřuje "x dělí y", tj. že existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $y = kx$.

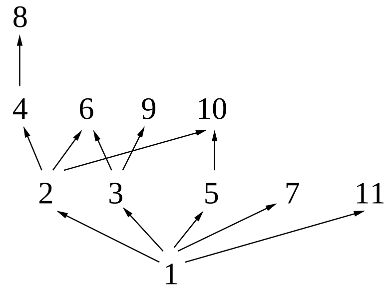
Ověříme, reflexivitu, antisymetrii a tranzitivitu.

1. Reflexivita: Mějme libovolný prvek $x \in A$. Protože $x = 1 \cdot x$ (tj. x dělí samo sebe), platí $x \; R \; x$. Relace je tudíž reflexivní.

2. Antisymetrie: Mějme dva prvky $x, y \in A$ takové, že $x\ R\ y$ a $y\ R\ x$. Z definice relace R to znamená, že $x|y$ a $y|x$. Existují tedy přirozená čísla $k, l \in \mathbb{N}$ taková, že $y = kx$ a $x = ly$. Dosazením druhé rovnice do první dostaneme $y = kly$, z čehož plyne, že $kl = 1$. Protože k a l jsou přirozená čísla, musí platit, že $k = l = 1$. Tudíž $y = 1 \cdot x = x$. Relace je tedy antisymetrická.

3. Tranzitivita: Mějme tři prvky $x, y, z \in A$ takové, že $x\ R\ y$ a $y\ R\ z$. Z definice R dostaneme, že $x|y$ a $y|z$. Existují tedy $k, l \in \mathbb{N}$ takové, že $y = kx$ a $z = ly$. Dosazením první rovnice do druhé dostaneme $z = (lk)x$. Protože $lk \in \mathbb{N}$, máme $x|z$. Takže $x\ R\ z$ a relace je tedy tranzitivní.

Z Hasseova diagramu by mělo být patrné, že žádný největší prvek neexistuje. Naopak existuje nejmenší a to je prvek 1, protože 1 dělí každé číslo z množiny A. Tento prvek je zaroveň také jediný minimální prvek. Maximálních prvků máme několik. Jsou to prvky $6, 7, 8, 9, 10, 11$.



Obrázek 1: Hasseův diagram

Příklad 1.4 Ověřte, že následující binární relace R na množine $\mathbb{N}^2$ je uspořádání.

$(x, y)\ R\ (u, v)$ právě tehdy, když platí jedna z následujících podmínek: 1. $x < u$, 2. $x = u$ a $y \leq v$.

Všiměte si, že pokud platí podmínka 1 nebo 2 v definici relace R, tak musí platit $x \leq u$. Jedná se o takzvané lexicografické uspořádání, které znáte ze slovníků.

Ověříme, reflexivitu, antisymetrii a tranzitivitu.

1. Reflexivita: Mějme libovolný prvek $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. Protože $x = x$ a $y \leq y$, platí $(x, y)\ R\ (x, y)$. Relace je tudíž reflexivní.

2. Antisymetrie: Mějme dva prvky $(x, y), (u, v) \in \mathbb{N}^2$ takové, že $(x, y)\ R\ (u, v)$ a $(u, v)\ R\ (x, y)$. Podle poznámky pod definicí musí platit $x \leq u$ a $u \leq x$. To ale znamená, že $x = u$. Z $x = u$ a našich předpokladů tedy plyne, že $y \leq v$ a $v \leq y$. Tudíž $y = v$ a relace je tedy antisymetrická.

3. Tranzitivita: Mějme tři prvky $(x, y), (u, v), (a, b) \in \mathbb{N}^2$ takové, že $(x, y)\ R\ (u, v)$ a $(u, v)\ R\ (a, b)$. Z toho podobně jako předtím plyne, že $x \leq u$ a $u \leq a$. Pokud alespoň jedna z těchto nerovností je ostrá (např. $x < u$), pak $x < a$, z čehož potom plyne, že $(u, v)\ R\ (a, b)$. Pokud ne, pak $x = u = a$. To ale znamená, že musí platit $y \leq v$ a $v \leq b$. Tudíž musí také platit $y \leq b$. Takže i v tomto případě $(x, y)\ R\ (a, b)$ a relace je tedy tranzitivní.

Všiměte si také, že vzhledem k relaci R nejsou žádné maximální prvky a tudíž také žádný největší. Naopak existuje nejměnší prvek a to je $(0, 0)$.

Příklad 1.5 Ukažte, že množina $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je spočetná, tj. $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$. Zřejmě $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$, protože zobrazení $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definované vztahem $f(x) = (x, 0)$ je prosté (když $x \neq y$, pak $(x, 0) \neq (y, 0)$). Díky Cantor-Bersteinově větě stačí tedy nalézt prosté zobrazení $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Jedno takové zobrazení je definováno vztahem $g(x, y) = 2^x 3^y$. Proč je toto zobrazení prosté. Předpokládejme, že $g(x, y) = g(u, v)$. To znamená, že $2^x 3^y = 2^u 3^v$. Připomeňme z aritmetiky, že každé přirozené číslo lze rozložit na součin prvočísel a navíc právě jedním způsobem. Číslo 2^x3^y je konkrétně součin x dvojek a y trojek. Podobně 2^u3^v. Protože $2^x3^y = 2^u3^v$, musí být na obou stranách této rovnice součin stejných prvočísel. Toho lze dosáhnout, ale jen když $x = u$ a $y = v$. Zobrazení g je tedy prosté.

Příklad 1.6 Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ taková, že $a < b$. Ukažte, že $|\langle a, b\rangle| = |\langle 0, 1\rangle|$. Stačí najít bijekci z jedné z množin $\langle a, b\rangle, \langle 0, 1\rangle$ do druhé. Přirozená volba jak zobrazit interval $\langle 0, 1\rangle$ na $\langle a, b\rangle$ je pomocí funkce $f : \langle 0, 1\rangle \to \langle a, b\rangle$ jejíž grafem je usečka spojující body $(0, a)$ a $(1, b)$. Jedná se o úsečku se směrnicí $b - a$ a posunem a. Nakreslete si obrázek. Analytický zápis f vypadá takto:

$$f(x) = a + (b - a)x\,.$$

Toto zobrazení je prosté, protože z $f(x_1) = f(x_2)$ plyne $a + (b - a)x_1 = a + (b - a)x_2$, tj. $x_1 = x_2$. Navíc je i na. Mějme $y \in \langle a, b\rangle$. Hledáme $x \in \langle 0, 1\rangle$ takové, že $f(x) = y$. Naše y tedy musí splňovat rovnici $a + (b - a)x = y$. Řešením této rovnice dostaneme hledané $x = (y - a)/(b - a)$.

Příklad 1.7 Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ taková, že $a < b$. Ukažte, že $|\langle a, b\rangle| = |\mathbb{R}|$. Zřejmě $|\langle a, b\rangle| \leq |\mathbb{R}|$, protože $\langle a, b\rangle \subseteq \mathbb{R}$. Díky Cantor-Bersteinově větě stačí najít prosté zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \langle a, b\rangle$ (tím ukážeme, že $|\mathbb{R}| \leq |\langle a, b\rangle|$). Ukážeme to nejprve pro speciální případ, kdy $a = -1$ a $b = 1$. Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \langle -1, 1\rangle$ je zobrazení definováné takto:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & \text{pro } x \geq 0\,, \\ \frac{x}{1-x} & \text{pro } x < 0\,. \end{cases}$$

Ujasněte si, proč $f(x) \in \langle -1, 1\rangle$ nebo si nakreslete graf. Ukážeme, že f je prosté. Předpokládejme, že $f(x) = f(y)$. Všiměte si, že z této rovnosti plyne, že buď $x, y \geq 0$ nebo $x, y \leq 0$, protože $x < 0 < y$ implikuje $f(x) < 0 < f(y)$. Pokud tedy $x, y \geq 0$, pak $f(x) = f(y)$ přejde na rovnici:

$$\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y}\,.$$

Vynásobním jmenovateli dostaneme:

$$x + xy = x(1 + y) = y(1 + x) = y + xy\,.$$

Vidíme tedy, že musí platit $x = y$. Podobně postupujeme i v případě $x, y \leq 0$.

Ukázali jsme tedy, že $|\mathbb{R}| = |\langle -1, 1\rangle|$. Z předchozího příkladu víme, že $|\langle -1, 1\rangle| = |\langle 0, 1\rangle| = |\langle a, b\rangle|$. Tudíž $|\mathbb{R}| = |\langle a, b\rangle|$.