# 1 Mocniné řady

Nechť $z_0, a_0, a_1, a_2, \ldots$ jsou konečná komplexní čísla. Pak řadu funkcí

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n , \quad z \in \mathbb{C} , \tag{1}$$

nazýváme *mocninou řadou.* Číslo $z_0$ se nazývá *střed mocniné řady*, čísla $a_n$ *koeficienty mocniné řady.*

Označme dále:

$$\begin{aligned} K(z_0, R) &= U(z_0, R) , \quad \text{pokud } R \in (0, \infty) , \\ K(z_0, 0) &= \{z_0\} , \\ K(z_0, \infty) &= \mathbb{C} . \end{aligned}$$

**Věta 1.1** *Ke každé mocniné řadě o středu $z_0$ existuje právě jedno číslo $R \in \langle 0, \infty \rangle$ tak, že řada konverguje v $K(z_0, R)$ a diverguje v $\mathbb{C} \setminus \overline{K(z_0, R)}$.*

Symbol $\overline{K(z_0, R)}$ značí uzávěr množiny $K(z_0, R)$, t.j. pokud $R \in (0, \infty)$, pak $K(z_0, R)$ je kruh o poloměru $R$ se středem $z_0$, který neobsahuje svoji hranici, kdežto $\overline{K(z_0, R)}$ označuje ten samý kruh i s hranicí. Číslu $R$ se říká *poloměr konvergence* mocniné řady a množina $K(z_0, R)$ se nazývá *kruh konvergence.*

Věta 1.1 tedy říká, že k dané řadě existuje takové číslo $R$, že pokud číslo $z$ v rovnici (1) bude ležet uvnitř kruhu konvergence $K(z_0, R)$, pak bude řada (1) konvergovat (t.j. bude existovat limita částečných součtů) a pokud bude $z$ ležet mimo kruh konvergence, pak bude řada (1) divergovat. Věta 1.1 ovšem nic neříká o tom, co se stane, pokud bude $z$ ležet na hranici kruhu konvergence.

Poloměr konvergence mocniné řady lze v mnoha případech určit pomocí následujícího tvrzení.

**Tvrzení 1.2** *Nechť existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} , \ \text{resp.} \ \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| .$$

*Pak pro poloměr konvergence $R$ platí:*

$$R = \left( \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} , \ \text{resp.} \ R = \left( \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)^{-1} .$$

Dále platí tato věta, která říká, že každá mocniná řada s nenulovým poloměrem konvergence představuje na svém kruhu konvergence nějakou holomorfní funkci. Později uvidíme, že i naopak, každá holomorfní funkce lze na jistém kruhu vyjádřit jako mocniná řada.

**Věta 1.3** *Nechť $R > 0$ je poloměr konvergence mocniné řady se středem v bodě $z_0$. Pak tato mocniná řada konverguje k funkci $f(z)$, která je holomorfní v kruhu konvergence $K(z_0, R)$.*

## 2 Taylorovy řady

**Věta 2.1 (Taylorova)** *Nechť $f(z)$ je holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$. Potom existuje mocniná řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\,, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,,$$

*která konverguje k $f(z)$ na $K(z_0, R)$, kde $R$ je vzdálenost nejbližší singularity funkce $f(z)$ od bodu $z_0$.*

Řada ve větě 2.1 se nazývá *Taylorova řada* nebo *Taylorův rozvoj* se středem $z_0$.

**Příklad 2.2** Nalezněte Taylorův rozvoj funkce:

$$f(z) = \frac{1}{1-z}\,,$$

se středem $z_0 = 0$.

Pokud spočítáme první, druhou, popř. třetí derivaci funkce $f(z)$, není težké nahlédnout, že obecný vztah pro $n$-tou derivaci je následující:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}\,.$$

Z věty 2.1 víme, že pro výpočet koeficinetu $a_n$ Taylorovy řady potřebujeme znát hodnotu $n$-té derivace v bodě $z_0 = 0$. Dosazením tedy dostáváme $f^{(n)}(0) = n!$ a tudíž $a_n = \frac{n!}{n!} = 1$.

Stanovme ještě poloměr konvergence $R$. Funkce $f(z)$ má jen jednu singularitu a to v bodě 1. Poloměr konvergence je tedy vzdálenost bodu 1 od středu v bodě 0, t.j. $R = 1$.

Tedy pro $z \in K(0,1)$ můžeme psát:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\,.$$

Znalosti rozvoje funkce $\frac{1}{1-z}$ se často využívá určení Taylorových rozvojů i pro jiné funkce.

**Příklad 2.3** Nalezněte Taylorův rozvoj funkce:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}\,,$$

se středem $z_0 = 0$.

Určíme nejprve poloměr konvergence. Funkce $f(z)$ má dvě singularity: v bodě $j$ a v bodě $-j$. Obě dvě jsou od středu v bodu 0 stejně vzdáleny a tato vzdálenost je 1, takže $R = 1$.

Dále upravme funkci $f(z)$ do tvaru funkce $\frac{1}{1-z}$ a pak použijeme znalosti jejího rozvoje.

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}\,.$$

**Příklad 2.4** Nalezněte Taylorův rozvoj funkce:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}\,,$$

se středem $z_0 = 1$.

Singularity jsou zase $j$ a $-j$. Takže tentokrát je poloměr konvergence vzdálenost bodu $j$ nebo $-j$ od bodu 1, t.j. $R = \sqrt{2}$.

Dále postupujeme takto: rozložíme funkci $f(z)$ na součet parciálních zlomků a pak hledáme Taylorův rozvoj pro každý parciální zlomek zvlášť. Tedy

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+j)(z-j)} = \frac{A}{z+j} + \frac{B}{z-j}\,.$$

Čísla $A, B$ musí splňovat následující rovnici:

$$1 = A(z-j) + B(z+j)\,.$$

Řešením dostaneme $A = \frac{j}{2}$ a $B = -\frac{j}{2}$. Máme tedy

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{j}{2}\frac{1}{z+j} - \frac{j}{2}\frac{1}{z-j}\,. \tag{2}$$

Hledejme Taylorův rozvoj funkce $\frac{1}{z+j}$ v bodě 1.

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+j} &= \frac{1}{1+j+(z-1)} = \frac{1}{1+j}\frac{1}{1+\frac{z-1}{1+j}} = \frac{1}{1+j}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{1+j}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{(1+j)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1-j)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^n\,.\end{aligned}$$

Obdobně nalezneme rozvoj funkce $\frac{1}{z-j}$ v bodě 1.

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-j} &= \frac{1}{1-j+(z-1)} = \frac{1}{1-j}\frac{1}{1+\frac{z-1}{1-j}} = \frac{1}{1-j}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{1-j}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{(1-j)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1+j)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^n\,.\end{aligned}$$

Dosazením do rovnice (2) a sloučením členů obou řad dostaneme:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2+1} &= \frac{j}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1-j)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^n - \frac{j}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1+j)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} j\,\frac{(-1)^n}{2^{n+2}}\left[(1-j)^{n+1} - (1+j)^{n+1}\right](z-1)^n\,.\end{aligned}$$

Někdy také může ulehčit nalezení Taylorova rozvoje to, že mocniné řady je možné derivovat člen po členu.

**Příklad 2.5** Nalezněte Taylorův rozvoj funkce

$$f(z) = \frac{z}{(z+j)^3}\,,$$

se středem $z_0 = 1$.

Funkce $f(z)$ má jedinou singularitu v bodě $-j$, takže poloměr konvergence $R = \sqrt(2)$.

Zase nejprve rozložíme funkci $f(z)$ na součet parciálních zlomků. V tomto případě lze postupovat jednodušeji:

$$\frac{z}{(z+j)^3} = \frac{z+j-j}{(z+j)^3} = \frac{1}{(z+j)^2} - \frac{j}{(z+j)^3}\,.$$

Nyní využijeme znalost Taylorova rozvoje funkce $\frac{1}{z+j}$ se středem v bodě 1 z příkladu 2.4 a toho, že lze mocninou řadu derivovat člen po členu.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z+j)^2} &= -\left(\frac{1}{z+j}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1-j)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^n\right)' \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(1-j)^{n+1}}{2^{n+1}}n(z-1)^{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(1-j)^{k+2}}{2^{k+2}}(k+1)(z-1)^k\,,
\end{aligned}$$

kde pro poslední řádek jsme zavedli nový sčítací index $k$ takový, že $k = n-1$ a využili znalosti, že $(-1)^{k+2} = (-1)^k$.

Odbodně pro další parciální zlomek dostáváme:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z+j)^3} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+j}\right)'' = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1-j)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^n\right)'' \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(1-j)^{n+1}}{2^{n+1}}n(n-1)(z-1)^{n-2} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(1-j)^{k+3}}{2^{k+4}}(k+2)(k+1)(z-1)^k\,.
\end{aligned}$$

Spojením dostáváme:

$$
\begin{aligned}
\frac{z}{(z+j)^3} &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(1-j)^{k+2}}{2^{k+2}}(k+1)(z-1)^k - \\
&\quad -j\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(1-j)^{k+3}}{2^{k+4}}(k+2)(k+1)(z-1)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(1-j)^{k+2}}{2^{k+4}}(k+1)\left[4-(1+j)(k+2)\right](z-1)^k\,,
\end{aligned}
$$

kde jsme některé části výrazu rozložili následovně:

$$
(1-j)^{k+3} = (1-j)^{k+2}(1-j)\,, \qquad \frac{1}{2^{k+2}} = \frac{2^2}{2^{k+4}} = \frac{4}{2^{k+4}}\,.
$$

Číslo $(1+j)$ v hranaté závorce ve výsledku vzniklo jako $j(1-j) = (1+j)$.

Podobně jako jsme v minulém příkladě použili fakt, že mocninou řadu lze derivovat člen po členu, může být také někdy výhodné využít faktu, že mocninou řadu lze integrovat člen po členu.

**Příklad 2.6** Nalezněte Taylorův rozvoj funkce

$$
f(z) = \log z\,,
$$

se středem $z_0 = 1+2j$.

Nejbližší singularita funkce $\log z$ od středu $1+2j$ je bod 0. Poloměr konvergence tedy bude $R = \sqrt{5}$.

Poněvadž $f'(z) = \frac{1}{z}$, můžeme nejprve nalézt Taylorův rozvoj funkce $\frac{1}{z}$ se středem v bodě $1+2j$ a pak integrovat člen po členu.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z} &= \frac{1}{1+2j+(z-1-2j)} = \frac{1}{1+2j}\frac{1}{1+\frac{z-1-2j}{1+2j}} \\
&= \frac{1}{1+2j}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1-2j)^n}{(1+2j)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1-2j)^n}{(1+2j)^{n+1}}
\end{aligned}
$$

Tuto řadu tedy budeme integrovat člen po členu a dostaneme:

$$
\begin{aligned}
\log z &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+2j)^{n+1}}\frac{1}{n+1}(z-1-2j)^{n+1} + C \\
&= C + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(1+2j)^k}\frac{1}{k}(z-1-2j)^k\,,
\end{aligned}
$$

kde $C$ je integrační konstanta. Uvědomíme-li si, že konstanta $C$ je vlastně nultý člen $a_0$ Taylorovy řady, dostaneme, že $C$ není nic jiného, než hodnota $\log(z_0)$, tzn. $C = \log(1+2j)$.

Taylorova řada funkce $\log z$ se středem v bodě $1+2j$ tedy je:

$$\log z = \log(1+2j) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(1+2j)^k} \frac{1}{k}(z-1-2j)^k .$$

**Příklad 2.7** Nalezněte Taylorův rozvoj funkce $f(z) = \sinh z$ se středem $z_0 = 0$.
Protože funkce $\sinh z$ je holomorfní v $\mathbb{C}$, bude poloměr konvergence $R = \infty$.

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} .$$

**Příklad 2.8** Nalezněte Taylorův rozvoj funkce $f(z) = \cos z$ se středem $z_0 = 1$.
Protože funkce $\cos z$ je holomorfní v $\mathbb{C}$, bude poloměr konvergence $R = \infty$.

$$\begin{aligned}
\cos z &= \cos[1 + (z-1)] = \cos(1)\cos(z-1) - \sin(1)\sin(z-1) \\
&= \cos(1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-1)^{2n} - \sin(1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-1)^{2n+1} \\
&= \cos(1) - \sin(1)(z-1) - \frac{1}{2}\cos(1)(z-1)^2 + \frac{1}{6}\sin(1)(z-1)^3 + \cdots
\end{aligned}$$

Pokud hledáme jen několik počátečních členů Taylorova rozvoje, bývá často výhodné využít faktu, že s mocninými řadami lze manipulovat jako s polynomy, t.j. lze je sčítat, odčítat, násobit a dělit jako dva polynomy.

**Příklad 2.9** Spočtěte první čtyři členy Taylorova rozvoje funkce

$$f(z) = \frac{e^z}{1-z} ,$$

se středem $z_0 = 0$.

Funkce $f(z)$ má jen jedinou singularitu a to v bodě 1. To znamená, že poloměr konvergence je $R = 1$.

Dále využijeme znalosti rozvoje funkcí $e^z$ a $\frac{1}{1-z}$.

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \cdots ,$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots .$$

Pro funkci $f(z)$ tedy dostaneme:

$$\begin{aligned}
\frac{e^z}{1-z} &= (1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \cdots)(1 + z + z^2 + z^3 + \cdots) \\
&= 1 + (1+1)z + (1+1+\frac{1}{2})z^2 + (1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6})z^3 + \cdots \\
&= 1 + 2z + \frac{5}{2}z^2 + \frac{8}{3}z^3 + \cdots
\end{aligned}$$

Při hledání Taylorova rozvoje funkce $\frac{e^z}{1-z}$ lze také postupovat alternativně tak, že vydělíme Taylorův rozvoj funkce $e^z$ polynomem $1-z$.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrl}
(1 & + & z & + & \frac{1}{2}z^2 & + & \frac{1}{6}z^3 & + \cdots) : (1-z) = 1 + 2z + \frac{5}{2}z^2 + \frac{8}{3}z^3 + \cdots \\
-1 & + & z & & & & & \\
\hline
 & & 2z & + & \frac{1}{2}z^2 & + & \frac{1}{6}z^3 & + \cdots \\
 & & -2z & + & 2z^2 & & & \\
\hline
 & & & & \frac{5}{2}z^2 & + & \frac{1}{6}z^3 & + \cdots \\
 & & & & -\frac{5}{2}z^2 & + & \frac{5}{2}z^3 & \\
\hline
 & & & & & & \frac{8}{3}z^3 & + \cdots
\end{array}
$$