1 Uzavřená Gaussova rovina a její topologie

Podobně jako reálná čísla rozšiřujeme o dva body ∞ a $-\infty$, rozšiřujeme také množinu komplexních čísel. Nepřidáváme však dva body nýbrž jen jeden. Ten budeme značit ∞ a budeme ho nazývat *bodem v nekonečnu*. Množinu $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ označíme symbolem $\mathbb{C}^*$ a nazveme ji *uzavřenou Gaussovou rovinou*.

Pro bod nekonečno definujeme následující operace:

1. pro všechna komplexní čísla z definujeme $|z| < \infty$,
2. $|\infty| = \infty$,
3. $z + \infty = \infty + z = \infty$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$,
4. $z\infty = \infty z = \infty$ pro všechna $z \in \mathbb{C}^* \setminus \{0\}$,
5. $z/\infty = 0$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$,
6. $z/0 = \infty$ pro všechna $z \in \mathbb{C}^* \setminus \{0\}$,
7. $\infty/z = \infty$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$,
8. $0^0 = 1$, $\infty^0 = 1$.

Abychom mohli vyjádřit blízkost nějakého komplexního čísla z komplexnímu číslu z_0, definujeme ε-okolí bodu z_0:

$$U(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}\,.$$

Geometricky vyjádřeno představuje množina $U(z_0, \varepsilon)$ vnitřek kruhu se středem v bodě z_0 a poloměrem ε. Jak se později ukáže je také účelné zavést tzv. *prstencové ε-okolí* bodu z_0:

$$P(z_0, \varepsilon) = U(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}\,.$$

Prstencové ε-okolí je tedy ε-okolí s vyjmutým středem.

Nakonec dodefinujeme ještě ε-okolí bodu v nekonečnu ∞, abychom mohli popsat, že se blížíme k ∞:

$$U(\infty, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| > \frac{1}{\varepsilon}\}\,.$$

Geometricky vyjádřeno představuje množina $U(\infty, \varepsilon)$ vnějšek kruhu se středem v počátku o poloměru ε. Je zřejmé, že pokud budeme ε zmenšovat k 0, poroste poloměr tohoto kruhy nade všechny meze.

2 Posloupnosti komplexních čísel

V této části zavedeme pojem posloupnosti komplexních čísel a pojem limity posloupnosti komplexních čísel. Posloupnost komplexních čísel je nějaká funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, která přiřazuje každému přirozenému číslu nějaké komplexní číslo:

$$f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots$$

Protože definiční obor každé takové funkce je stejný, zjednodušujeme zápis pomocí indexů:

$$z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots ,$$

nebo také zkráceně píšeme $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Geometricky je možné si posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ představit jako množinu bodů z_n v rovině, které jsou očíslovány přirozenými čísly.

Definice 2.1 Řekneme, že posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ má *limitu* $z \in \mathbb{C}^*$ (nebo *konverguje* k bodu $z \in \mathbb{C}^*$), jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n > n_0$ platí $z_n \in U(z, \varepsilon)$.

Jsou-li tyto podmínky splněny, píšeme:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z\,.$$

Ujasněme si, co tato definice vyjadřuje. Pokud posloupnost má limitu z, znamená to, že pro kruh s libovolným kladným poloměrem ε se středem v bodě z, jsme schopni nalézt takový index n_0, že všechny body s indexem vyšším než n_0 už musí ležet uvnitř tohoto kruhu.

Jinými slovy to znamená, že jsme schopni dostat se body této posloupnosti libovolně blízko bodu z. Ještě jinak ekvivalentně řečeno: pro každý kruh s kladným poloměrem ε se středem v bodě z platí, že mimo tento kruh se může nalézat pouze konečně mnoho bodů posloupnosti (a tudíž uvnitř nekonečně mnoho).

Věta 2.2 *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

DŮKAZ: Promysleme si, že důkaz plyne okamžitě z definice limity. Předpokládejme, že pro nějakou posloupnost existuje více než jedna limita (tedy alespoň dvě různé). Vezměme tedy dvě různé limity a označme je z a w. Vezmeme-li dostatečně malé poloměry (např. $|z - w|/2$) můžeme nalézt dva kruhy K_z a K_w se středy v z a w tak, že nemají žádný společný vnitřní bod. Jak jsme poznamenali výše, z definice limity plyne, že uvnitř kruhu K_z se musí vyskytovat nekonečně mnoho bodů posloupnosti a vně jen konečně mnoho, ale stejné tvrzení platí podle předpokladu i pro K_w, což je spor, protože vnitřky kruhů K_z a K_w nemají žádný společný bod (nakreslete si obrázek!). □

Všimněme si jedné užitečné vlastnosti limit. Pojem limity je natolik silný, že pokud má posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ limitu, $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, bude již každá její podposloupnost konvergovat ke stejnému z. Podposloupnost posloupnosti $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ je pro nás taková posloupnost, která vznikne odebráním konečně nebo nekonečně mnoha prvků posloupnosti $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že zbude stále ještě nekonečně mnoho členů. Typicky konečným odebráním může být vypuštění počátečního segmentu, t.j. uvažujeme jen prvky s indexem vyšším než nějaké přirozené číslo. Odebrání nekonečně mnoha prvků můžeme ukázat např. na podposloupnosti vzniklé odebráním všech prvků s lichým indexem, dostaneme tedy $z_2, z_4, z_6, \dots, z_{2n}, \dots$ Napišme ještě definici podposloupnosti formálně.

Definice 2.3 Nechť $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost komplexních čísel. Potom *podposloupností* posloupnosti $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ máme na mysli následující posloupnost:

$$\{z_{g(k)}\}_{k=1}^{\infty},$$

kde $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je nějaká rostoucí funkce. Funkce g vybírá prvky této podposloupnosti, t.j. každému $k \in \mathbb{N}$ přiřadí index prvku posloupnosti $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, který nechceme odebrat.

Věta 2.4 *Je-li* $\lim_{n\to\infty} z_n = z$*, pak pro každou podposloupnost* $\{z_{g(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ *platí:*

$$\lim_{k\to\infty} z_{g(k)} = z\,.$$

DŮKAZ: Musíme ukázat, že uvnitř každého kruhu s kladným poloměrem ε se středem v bodě z leží nekonečně mnoho prvků podposloupnosti $\{z_{g(k)}\}_{k=1}^{\infty}$. Protože $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, víme, že uvnitř každého takového kruhu leží nekonečně mnoho prvků posloupnosti $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ a vně jen konečně mnoho popř. žádný. Odebereme-li nějaké prvky posloupnosti $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, je zřejmé, že mezi konečně mnoha body vně kruhu může zůstat maximálně konečně mnoho bodů podposloupnosti $\{z_{g(k)}\}_{k=1}^{\infty}$. Protože ale podposloupnost $\{z_{g(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ má nekonečně mnoho bodů, musí jich uvnitř kruhu ležet nekonečně mnoho. Což znamená, že $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{z_{g(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ mají stejnou limitu. □

Pozor ale! Pokud víme, že nějaká podposloupnost $\{z_{g(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k bodu z, nemůžeme o konvergenci posloupnosti $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ nic říct. Např. podposloupnost lichých členů posloupnosti $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu -1, kdežto posloupnost $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ limitu nemá. Nicméně platí následující věta.

Věta 2.5 *Vznikne-li podposloupnost* $\{z_{g(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ *z posloupnosti* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *odebráním jen konečně mnoha členů a* $\lim_{k\to\infty} z_{g(k)} = z$*, pak* $\lim_{n\to\infty} z_n = z$*.*

DŮKAZ: Protože $\{z_{g(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ vznikla odebráním konečně mnoha členů, můžeme nalézt "poslední" odebraný člen z_m (t.j. pro všechny odebrané členy z_n máme $n \le m$). Sestavme nyní novou podposloupnost $\{z_{h(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ tak, že $h(k) = m + k$. Podposloupnost $\{z_{h(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ obsahuje tedy členy $z_{m+1}, z_{m+2}, z_{m+3}, \ldots$ Potom je zřejmé, že $\{z_{h(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ je podposloupnost nejen $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ale i $\{z_{g(k)}\}_{k=1}^{\infty}$.

Jelikož $\lim_{k\to\infty} z_{g(k)} = z$, dostaneme z Věty 2.4, že také $\lim_{k\to\infty} z_{h(k)} = z$. Tedy pro každé $\varepsilon > 0$ existuje index k_0 takový, že pro všechna $k > k_0$ platí $z_{h(k)} \in U(z, \varepsilon)$.

Abychom dokázali, že $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ musíme nalézt takový index n_0, aby pro všechna $n > n_0$ platilo $z_n \in U(z, \varepsilon)$. Vezměme $n_0 = k_0 + m$, potom pro každé $n > n_0$ máme $n - m > k_0$ a tedy $z_{h(n-m)} \in U(z, \varepsilon)$. Protože ale $z_n = z_{h(n-m)}$ je rovněž i $z_n \in U(z, \varepsilon)$ a důkaz je dokončen. □

Další užitečnou vlastností pro vyšetřování limit posloupností komplexních čísel je vztah mezi posloupnostmi $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{|z_n|\}_{n=1}^{\infty}$. Uvědomme si, že $\{|z_n|\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel, jak jí znáte z prvního kurzu reálné analýzy.

Věta 2.6 *Je-li* $\lim_{n\to\infty} z_n = z$*, pak* $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z|$*. Je-li* $\lim_{n\to\infty} |z_n|$ *rovna* 0 *respektive* ∞*, pak je také* $\lim_{n\to\infty} z_n$ *rovna* 0 *respektive* ∞*.*

DŮKAZ: Pro první část věty musíme ukázat, že pro všechna $\varepsilon > 0$ najdeme takový index n_0, že pro všechna $n > n_0$ platí $||z| - |z_n|| < \varepsilon$. Protože $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, máme pro všechna $\varepsilon > 0$ takový index n_0, že pro všechna $n > n_0$ platí $z_n \in U(z, \varepsilon)$, což z definice okolí znamená $|z - z_n| < \varepsilon$. Využijme vztahu $||z| - |z_n|| \leq |z - z_n|$ (viz zápis z cvičení 1). Dostáváme tedy $||z| - |z_n|| \leq |z - z_n| < \varepsilon$, což jsme měli ukázat.

(Promyslete si důkaz druhé části věty!) □

Pokud je limita posloupnosti konečná, můžeme převést podle následující věty problém hledání limity posloupnosti komplexních čísel na hledání dvou limit posloupností reálných čísel.

Věta 2.7 *K tomu, aby existovala konečná* $\lim_{n\to\infty} z_n = z$*, je nutné a postačující, aby existovaly konečné*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\ z_n = a\,, \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\ z_n = b\,.$$

Je-li podmínka splněna je $z = a + jb$*.*

DŮKAZ: Protože věta vyjadřuje ekvivalenci mezi existencí konečných limit, má důkaz dvě části. (1) Z předpokladu existence konečné $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ musíme ukázat, že $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\ z_n = a$ a $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\ z_n = b$ existují a jsou konečné a navíc platí $z = a + jb$. (2) Naopak z předpokladu existence konečných limit $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\ z_n = a$ a $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\ z_n = b$ dokázat, že $\lim_{n\to\infty} z_n = z = a + jb$.

(Důkaz si promyslete a nakreslete si obrázek!). □

Podobně jako pro posloupnosti reálných čísel máme i pro posloupnosti komplexních čísel následující tvrzení:

Tvrzení 2.8 *Nechť existují*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z\,, \quad \lim_{n\to\infty} w_n = w\,.$$

Pak pokud výrazy na pravých stranách mají smysl, platí následující:

1. $\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = z + w$,
2. $\lim_{n\to\infty}(z_n w_n) = zw$,
3. $\lim_{n\to\infty}(z_n / w_n) = z/w$.

Příklad 2.9 Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} (n + j \sin \frac{1}{n})\,.$$

Protože platí

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty\,, \quad \lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{n} = 0\,,$$

dostaneme podle Tvrzení 2.8

$$\lim_{n\to\infty}(n + j\sin\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} n + j\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n} = \infty + j0 = \infty\,.$$

Příklad 2.10 Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}[n^2 + j(-1)^n]\,.$$

Protože $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ neexistuje, nemůžeme použít Tvrzení 2.8 jako v předchozím příkladě. Je jasné, že body posloupnosti se s rostoucím indexem n budou vzdalovat od bodu 0 (nakreslete si obrázek!). Pokud tedy ukážeme, že moduly prvků posloupnosti rostou nade všechny meze, dostaneme podle Věty 2.6, že $\lim_{n\to\infty}[n^2 + j(-1)^n] = \infty$.

Pro moduly ovšem platí následující nerovnosti:

$$|n^2 + j(-1)^n| \geq |\mathrm{Re}(n^2 + j(-1)^n)| = |n^2|\,.$$

A poněvadž $\lim_{n\to\infty}|n^2| = \infty$, dostáváme, že $\lim_{n\to\infty}|n^2 + j(-1)^n| = \infty$.

Příklad 2.11 Vypočtěte pro $z \in \mathbb{C}$ pevné číslo $\lim_{n\to\infty} z_n$, kde

$$z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\,.$$

Je zřejmé, že kdybychom se snažili rozložit prvky posloupnosti na reálnou a imaginární část, museli bychom se potýkat s binomickým rozvojem závorky $(1 + \frac{z}{n})^n$.

Jak jsme ukázali na konci textu k předchozímu cvičení, daleko snadněji můžeme mocnění provádět v exponenciálním tvaru komplexního čísla. Převedeme tedy každý člen posloupnosti z_n do exponenciálního tvaru a budeme hledat limitu modulů $|z_n|$ a argumentů $\arg z_n$. Musíme ale být opatrní. Komplexní číslo z můžeme jednoznačně vyjádřit v exponenciálním tvaru jen pokud $z \neq 0$ (pro $z = 0$ nemůžeme jednoznačně vyjádřit argument). Nicméně některé členy z_n mohou v principu být nulové. Podívejme se tedy za jakých podmínek bude platit $z_n = 0$. Dostáváme tedy $(1 + \frac{z}{n})^n = 0$, ale to je možné jen pokud $1 + \frac{z}{n} = 0$ neboli $n = -z$. To znamená, že pokud je z záporné celé číslo, bude pro $n = -z$ platit $z_n = 0$. Tedy jeden člen posloupnosti bude nulový. Pokud z není záporné celé číslo, nebude žádný člen z_n nulový. Z uvedeného vyplývá, že maximálně jeden člen posloupnosti $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ může být nulový. Podle Vět 2.4, 2.5 můžeme takový člen odebrat aniž bychom změnili výslednou limitu.

Vyjádřeme nejprve moduly $|z_n|$. Označme $z = x + jy$, pak

$$|z_n| = \left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| = \left|1 + \frac{z}{n}\right|^n = \left|1 + \frac{x}{n} + j\frac{y}{n}\right|^n\,.$$

Protože $|1 + \frac{x}{n} + j\frac{y}{n}| = \sqrt{(1 + \frac{x}{n})^2 + (\frac{y}{n})^2}$, dostaneme

$$|z_n| = \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}\,.$$

Dále vyjádřeme argumenty $\arg z_n = \arg(1+\frac{z}{n})^n$. Označme $w_n = 1+\frac{x}{n}+j\frac{y}{n}$. Protože $\lim_{n\to\infty} w_n = 1$, víme, že od určitého n_0 budou všechny w_n ležet uvnitř kruhu o poloměru 1 se středem v bodě 1, což znamená, že $\arg w_n \in (-\pi/2, \pi/2)$ (poloměr 1 zde představuje ε a volili jsme ho tak abychom splnili výše uvedenou podmínku na argumenty – nakreslete si obrázek!). Proto zahodíme-li prvních n_0 členů posloupnosti, můžeme psát

$$\arg w_n = \arctan \frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}\,,$$

protože pro argumenty z intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$ určuje funkce arctan argumenty již jednoznačně. Dostáváme tedy

$$\arg z_n = \arg(w_n)^n = n \arctan \frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}\,.$$

Teď již jen zbývá určit $\lim_{n\to\infty} |z_n|$ a $\lim_{n\to\infty} \arg z_n$.

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n}{2}\ln\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2\right]}\,.$$

Dále

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \ln\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \ln\left[1 + 2\frac{x}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2}\right]\,.$$

Zaveďme novou proměnnou $h = \frac{1}{n}$, potom předchozí limitu můžeme vyjádřit jako

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \ln\left[1+2xh+(x^2+y^2)h^2\right] = \lim_{h\to 0} \frac{2x+2(x^2+y^2)h}{2[1+2xh+(x^2+y^2)h^2]} = x\,,$$

kde na výpočet předposlední rovnosti jsme použili L'Hospitalovo pravidlo. Máme tedy

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = e^x\,.$$

Pro $\arg z_n$ dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \arg z_n = \lim_{n\to\infty} n \arctan \frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \arctan \frac{yh}{1+xh}\,.$$

Pomocí L'Hospitalova pravidla máme

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \arctan \frac{yh}{1+xh} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{1+\left(\frac{yh}{1+xh}\right)^2} \frac{y(1+xh)-yhx}{(1+xh)^2} = y\,.$$

Nakonec tedy

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} |z_n| e^{j\arg z_n} = \lim_{n\to\infty} |z_n| \lim_{n\to\infty} e^{j\arg z_n} = e^x e^{jy}\,.$$

3 Limita funkce komplexní proměnné

Jednoznačnou komplexní funkcí komplexní proměnné pro nás bude zobrazení $f : D \to \mathbb{C}^*$, kde $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}^*$. Často budeme pro zápis hodnoty v bodě $f(z)$ používat rozklad na reálnou a imaginární část, t.j. $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$, kde $z = x + jy$, $u(x,y) = \mathrm{Re}\ f(z)$ a $v(x,y) = \mathrm{Im}\ f(z)$.

Definice 3.1 Nechť M je podmnožina $\mathbb{C}^*$. Bod $a \in \mathbb{C}^*$ nazveme *hromadným bodem množiny* M právě tehdy, když libovolné prstencové okolí $P(a,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, obsahuje alespoň jeden bod množiny M.

Z definice plyne, že v každém $P(a,\varepsilon)$ leží nekonečně mnoho bodů M. Vezmeme-li totiž $P(a, \frac{1}{n})$, dostaneme, že pro všechna n taková, že $\frac{1}{n} < \varepsilon$ platí

$$P(a, \frac{1}{n}) \cap M \neq \emptyset\,.$$

Definice 3.2 Řekneme, že funkce $f : D \to \mathbb{C}^*$ má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}^*$ *limitu* $L \in \mathbb{C}^*$ *vzhledem k množině* $M \subseteq D$ právě tehdy, jestliže platí:

1. bod z_0 je hromadným bodem množiny M,
2. pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $z \in P(z_0,\delta) \cap M$ platí $f(z) \in U(L,\varepsilon)$.

Pak píšeme

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in M}} f(z) = L\,.$$

Pokud $M = D$ pak popis "vzhledem k množině D" vynecháváme a píšeme jen

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L\,.$$

Věta 3.3 *1. Každá funkce $f : D \to \mathbb{C}^*$ má v bodě z_0 nanejvýš jednu limitu. Navíc pokud $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$, pak pro všechny $M \subseteq D$ platí*

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in M}} f(z) = L\,.$$

2. Nechť $z_0 = x_0 + jy_0$. Pak existuje konečná

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in M}} f(z) = a + jb$$

právě když existují konečné

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (x_0,y_0) \\ (x,y) \in M}} u(x,y) = a\,, \qquad \lim_{\substack{(x,y) \to (x_0,y_0) \\ (x,y) \in M}} v(x,y) = b\,.$$

Podobně jako pro limity posloupností platí následující tvrzení:

Tvrzení 3.4 *Nechť existují*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \,, \quad \lim_{z \to z_0} g(z) = K \,.$$

Pak pokud výrazy na pravých stranách mají smysl, platí následující:

1. $\lim_{z \to z_0} (f(z) + g(z)) = L + K$,
2. $\lim_{z \to z_0} (f(z) g(z)) = LK$,
3. $\lim_{z \to z_0} (f(z)/g(z)) = L/K$.

Příklad 3.5 Vypočtěte $\lim_{z \to j} (z^4 + 1)$. Podle Tvrzení 3.4 můžeme psát:

$$\lim_{z \to j} (z^4 + 1) = j^4 + 1 = 1 + 1 = 2 \,.$$

Příklad 3.6 Vypočtěte $\lim_{z \to 1} \frac{z^n - 1}{z - 1}$. Tady nemůžeme postupovat stejně jako v předchozím příkladě, protože bychom dostali $\frac{0}{0}$. Nicméně platí

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = \frac{(z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1)}{z - 1} = z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 \,.$$

Takže

$$\lim_{z \to 1} \frac{z^n - 1}{z - 1} = \lim_{z \to 1} (z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1) = n \,.$$

Příklad 3.7 Ukažte, že následující limita neexistuje

$$\lim_{z \to 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} + j \frac{x^2}{y + 1} \,.$$

Pokud by limita v bodě 0 existovala, musela by podle Věty 3.3 existovat i vzhledem všem podmnožinám $M \subseteq D$. Zvolme nejprve

$$M = \{(x, y) \in D \mid y = 0\} \,,$$

tzn. prvky D ležící na reálné ose. Potom

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in M}} \frac{2xy}{x^2 + y^2} + j \frac{x^2}{y + 1} = \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in M}} \frac{0}{x^2} + jx^2 = 0 + j0 = 0 \,.$$

Nyní zvolme

$$M = \{(x, y) \in D \mid x = y\} \,,$$

tzn. prvky D ležící ose prvního kvadrantu. Potom

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in M}} \frac{2xy}{x^2+y^2} + j\frac{x^2}{y+1} = \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in M}} \frac{2x^2}{2x^2} + j\frac{x^2}{x+1} = 1 + j0 = 1\,.$$

Vzhledem k tomu, že jsme v jednotlivých případech volby M dospěli k různým výsledkům, plyne z Věty 3.3 neexistence zadané limity.

Příklad 3.8 Vypočtěte

$$\lim_{z\to 0} \frac{x^2}{z}\,.$$

Protože $x = \mathrm{Re}\, z$, máme $|x| \le |z|$. Můžeme tedy modul $|f(z)|$ omezit následovně:

$$|f(z)| = \left|\frac{x^2}{z}\right| = \frac{|x|^2}{|z|} \le \frac{|x|^2}{|x|} = |x| \le |z|\,.$$

Je zřejmé, že když $z \to 0$, tak i $|z| \to 0$. Protože ale $|f(z)| \le |z|$, dostáváme, že $|f(z)| \to 0$. A z toho plyne, že

$$\lim_{z\to 0} \frac{x^2}{z} = 0\,.$$

4 Spojitost a derivace

Spojitost komplexní funkce definujeme podobně jako v pro funkce reálné proměnné.

Definice 4.1 Řekneme, že komplexní funkce $f : D \to \mathbb{C}^*$, $D \subseteq \mathbb{C}^*$, je *spojitá v bodě* $z_0 \in D$ právě tehdy, když $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. Pokud je f spojitá v každém bodě D, říkáme, že f je spojitá.

Uvědomme si tedy, že pro spojitost funkce f v bodě z_0 musí být splněny následující tři předpoklady:

1. $f(z_0)$ je definována,
2. $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existuje,
3. $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Rovněž derivaci komplexní funkce je možné zavést obdobně jako v reálné analýze.

Definice 4.2 Nechť funkce f je definována v nějakém okolí $U(z_0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Říkáme, že f má *derivaci v bodě* z_0 pokud existuje konečná

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0)\,.$$

Věta o derivaci součtu, součinu, podílu a složené funkce je zcela stejná jako znáte z reálné analýzy.

Věta 4.3 *Nechť existují $f'(z_0)$ a $g'(z_0)$ potom*

1. $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$,
2. $(f-g)'(z_0) = f'(z_0) - g'(z_0)$,
3. $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$,
4. $(\frac{f}{g})'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}$,
5. *pokud navíc existuje* $f'(g(z_0))$ *pak* $[f(g(z_0))]' = f'(g(z_0))g'(z_0)$.

Následující věta má zásadní význam nejen pro výpočet derivace, ale i pro určování bodů, ve kterých má funkce derivaci.

Věta 4.4 *Funkce $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ má v bodě $z_0 = x_0 + jy_0$ derivaci právě tehdy, když*

1. *funkce u a v mají v bodě (x_0, y_0) totální diferenciál,*
2. *jsou splněny* Cauchyovy-Riemannovy podmínky *(C-R podmínky) v bodě (x_0, y_0):*
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

Pokud $f'(z_0)$ existuje, platí

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + j\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - j\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\,.$$

Připomínám, že k tomu aby byla splněna 1.podmínka, stačí aby byly parciální derivace u a v spojité v bodě (x_0, y_0) (viz kurz o funkcích více proměnných).

Příklad 4.5 Ukažte, že platí $(z^2)' = 2z$. Rozložme funkci z^2 na reálnou a imaginární část.

$$z^2 = (x+jy)^2 = x^2 - y^2 + j2xy\,.$$

Máme tedy $u(x,y) = x^2 - y^2$ a $v(x,y) = 2xy$. Spočtěme jednotlivé parciální derivace.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x & \frac{\partial v}{\partial x} &= 2y \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -2y & \frac{\partial v}{\partial y} &= 2x \end{aligned}$$

Je zřejmé, že všechny parciální derivace jsou spojité funkce, což znamená, že 1.podmínka Věty 4.4 je splněna v každém bodě (x,y). Navíc C-R podmínky jsou splněny v každém bodě (x, y). To znamená, že derivace $(z^2)'$ existuje v každém bodě $z = x + jy$ a platí

$$(z^2)' = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + j2y = 2(x + jy) = 2z\,.$$

Příklad 4.6 Určete, kde existuje $(\overline{z}^2)'$. Rozložme funkci $\overline{z}^2$ na reálnou a imaginární část.

$$\overline{z}^2 = (x - jy)^2 = x^2 - y^2 - j2xy\,.$$

Máme tedy $u(x, y) = x^2 - y^2$ a $v(x, y) = -2xy$. Spočtěme jednotlivé parciální derivace.

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x & \dfrac{\partial v}{\partial x} = -2y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y & \dfrac{\partial v}{\partial y} = -2x \end{array}$$

Je zřejmé, že všechny parciální derivace jsou spojité funkce, což znamená, že 1.podmínka Věty 4.4 je splněna v každém bodě (x, y). Ovšem z C-R podmínek plyne, že $2x = -2x$ a $-2y = 2y$. Tyto rovnice jsou splněny jen v bodě $(0, 0)$. To znamená, že derivace $(\overline{z}^2)'$ existuje jen v bodě $z = 0$ a platí

$$(\overline{z}^2)' = \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) + j\frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) = 0 + j0 = 0\,.$$