1 Linearní prostory nad komplexními čísly

V této přednášce budeme hledat kořeny polynomů, které se dále budou moci vyskytovat jako složky vektorů nebo matic. Vzhledem k tomu, že kořeny polynomu (i reálného) mohou být obecně komplexní čísla, bude potřeba malinko změnit definici lineárního prostoru. Doposud jsme předpokládali, že skaláry v lineárním prostoru mohou být jen reálná čísla. Nicméně vše funguje stejně (až na věci okolo skalárního součinu), když za množinu skalárů vezmeme místo reálných čísel čísla komplexní. Ačkoli v této přednášce tedy zaměníme reálná čísla za komplexní, budeme se jim snažit v ukázkových příkladech vyhnout. Naším typickým lineárním prostorem bude nyní $\mathbb{C}^n$ místo $\mathbb{R}^n$. Standarní báze $(E) = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ prostoru $\mathbb{C}^n$ je stejná jako pro $\mathbb{R}^n$, tj. $\boldsymbol{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, kde 1 je na i-té pozici.

2 Vlastní čísla a vektory

Nechť $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení, $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ báze L_1 a $(C) = (\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_m)$ báze L_2. Připomeňme, že matice $\mathbf{A}$ lineárního zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázím (B) a (C) je definována jako matice, jejíž i-tý sloupec je složen ze souřadnic obrazu i-tého bázového vektoru $\boldsymbol{b}_i$ vzhledem k bázi (C), tj. $[\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_i)]_C$. Navíc tato matice splňuje rovnost $[\mathcal{A}(\boldsymbol{x})]_C = \mathbf{A} \cdot [\boldsymbol{x}]_B$ pro každý vektor $\boldsymbol{x} \in L_1$.

Mějme čtvercovou matici $\mathbf{A}$ typu (m, n). Připomeňme, že zobrazení $\mathcal{A}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ definované $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x}$ je lineární. Navíc $\mathbf{A}$ je matice tohoto lineárního zobrazení vzhledem ke standardním bázím $\mathbb{C}^n$ a $\mathbb{C}^m$.

Nechť L je lineární prostor dimenze n a $\mathcal{A}\colon L \to L$ je lineární zobrazení. Pokud (B) je uspořádaná báze L a $\mathbf{A}$ matice $\mathcal{A}$ vzhledem (B) a (B), budeme matici $\mathbf{A}$ krátce nazývat *maticí lineárního zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázi (B)*. Všimněte si, že $\mathbf{A}$ musí být čtvercová typu (n, n). V praxi je často užitečné, když je tato matice "co nejjednodušší". Budeme tedy zkoumat za jakých okolností a jak je možné lineární zobrazení $\mathcal{A}$ reprezentovat tzv. diagonální (tj. "jednoduchou") maticí.

Definice 1 *Čtvercovou matici $\mathbf{D}$ typu (n, n) nazveme* diagonální*, pokud je tvaru:*

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Diagonální matici $\mathbf{D}$ značíme krátce $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Všimněte si, že když lze lineární zobrazení $\mathcal{A}$ reprezentovat pomocí diagonální matice $\mathbf{D}$ vzhledem nějaké bázi $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$, musí pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platit $\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_i) = \lambda_i \boldsymbol{b}_i$, protože i-tý sloupec matice $\mathbf{D}$ je složen ze souřadnic $\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_i)$ v bázi (B). To motivuje následující definici.

Definice 2 *Mějme lineární zobrazení $\mathcal{A}\colon L \to L$. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ se nazývá* vlastním číslem *zobrazení $\mathcal{A}$, pokud existuje nenulový vektor $\boldsymbol{x} \in L$ takový, že $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$. Vektor $\boldsymbol{x}$ se nazývá* vlastní vektor *zobrazení $\mathcal{A}$ příslušný vlastnímu číslu λ.*

Věta 1 *Nechť L je lineární prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ a $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ jeho báze. Lineární zobrazení $\mathcal{A}\colon L \to L$ lze reprezentovat pomocí diagonální matice $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ vzhledem k bázi (B) právě tehdy, když $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla $\mathcal{A}$ a $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n$ jsou jejich příslušné vlastní vektory.*

DŮKAZ: $(\Rightarrow)$: Jestliže $\mathbf{D}$ je matice $\mathcal{A}$ vzhledem K (B), pak i-tý sloupec matice $\mathbf{D}$ jsou souřadnice $\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_i)$ v bázi (B). Takže pro všechny $i \in \{1, \dots, n\}$ máme $\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_i) = \lambda_i \boldsymbol{b}_i$, tj. λ_i je vlastní číslo $\mathcal{A}$ a $\boldsymbol{b}_i$ je jeho příslušný vlastní vektor.

$(\Leftarrow)$: Předpokládejme, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla $\mathcal{A}$ a $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n$ jsou jejich příslušné vlastní vektory. Pak pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ máme $\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_i) = \lambda_i \boldsymbol{b}_i$. Z toho plyne, že souřadnice $\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_i)$ v bázi (B) je vektor samých nul až na i-tou složku, která se rovná λ_i. Matice $\mathcal{A}$ vzhledem k bázi (B) je tedy rovna $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. □

Pokud tedy nalezneme bázi L, která se sestává z vlastních vektorů $\mathcal{A}$, je možné reprezentovat $\mathcal{A}$ pomocí diagonální matice vzhledem k této bázi. Ukážeme si, že za jistých okolností je možné takovou bázi najít.

Protože každá čtverová matice $\mathbf{A}$ typu (n, n) definuje lineární zobrazení $\mathcal{A}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ vztahem $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x}$, má smysl zavést pojem vlastního čísla a vektoru i pro čtvercové matice.

Definice 3 *Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice typu (n, n). Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ se nazývá* vlastním číslem *matice $\mathbf{A}$, pokud existuje nenulový vektor $\boldsymbol{x} \in L$ takový, že $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$. Vektor $\boldsymbol{x}$ se nazývá* vlastní vektor matice $\mathbf{A}$ příslušný vlastnímu číslu λ.

Následující věta davá do souvislosti vlastní čísla a vektory lineárního zobrazení a jeho matice. Připomeňme, že zobrazení $[\ ]_B$, které přiřazuje vektoru jeho souřadnice v bázi (B), je izomorfismus. Jeho inverze je zobrazení $(\ )_B$, které souřadnicím přiřadí odpovídající lineární kombinaci.

Věta 2 *Mějme lineární zobrazení $\mathcal{A}\colon L \to L$ a jeho matici $\mathbf{A}$ vzhledem k bázi (B). Pak $\mathcal{A}$ má stejná vlastní čísla jako $\mathbf{A}$. Navíc vektor $\boldsymbol{x}$ je vlastní vektor $\mathcal{A}$ právě tehdy, když $[\boldsymbol{x}]_B$ je vlastní vektor matice $\mathbf{A}$.*

DŮKAZ: $(\Rightarrow)$: Předpokládejme, že $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo $\mathcal{A}$ a $\boldsymbol{x}$ je příslušný vlastní vektor, tj. $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$. Aplikací zobrazení $[\ ]_B$ na tuto rovnost dostaneme:

$$\mathbf{A} \cdot [\boldsymbol{x}]_B = [\mathcal{A}(\boldsymbol{x})]_B = [\lambda \boldsymbol{x}]_B = \lambda [\boldsymbol{x}]_B \,,$$

což znamená, že λ je vlastní číslo $\mathbf{A}$ a $[\boldsymbol{x}]_B$ je příslušný vlastní vektor.

$(\Leftarrow)$: Obráceně předpokládejme, že $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo $\mathbf{A}$ a $[\boldsymbol{x}]_B$ je příslušný vlastní vektor, tj.

$$[\mathcal{A}(\boldsymbol{x})]_B = \mathbf{A} \cdot [\boldsymbol{x}]_B = \lambda [\boldsymbol{x}]_B = [\lambda \boldsymbol{x}]_B \,.$$

Aplikací $(\ )_B$ na tuto rovnost dostaneme $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$. □

Z předchozí věty tedy plyne, že pokud chceme najít vlastní čísla a vektory lineárního zobrazení $\mathcal{A}$ stačí hledat vlastní čísla a vektory jeho matice $\mathbf{A}$, tj. vyřešit rovnici $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} = \lambda \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{x}$ pro neznámé číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ a neznámý vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$. Upravou této rovnice dostaneme $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, což je homogenní soustava lineárních rovnic s parametrem λ.

Vzhledem k tomu, že vlastní vektory jsou z definice nenulové, zajímají nás pouze netriviální řešení této soustavy. To nastává pouze v případě, že soustava má nekonečně mnoho řešení, což je ekvivalentní tomu, že matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ je singulární. Vyjádřeno pomocí determinantu to znamená, že $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$.

Definice 4 *Polynom* $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ *v proměnné* λ *se nazývá* charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$, *k-násobný kořen tohoto polynomu se nazývá* k-násobné vlastní číslo.

Příklad 1 Nechť $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Pak $\det(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{E}) = (\lambda_1 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda)$. Takže vlastní čísla matice $\mathbf{D}$ jsou $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu λ_i jsou vektory samých nul až na i-tou složku a_i, která musí být nenulová, viz následující rovnost:

$$\mathbf{D} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i a_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 2 Nechť $\mathcal{A} \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ je lineární zobrazení takové, že $\mathcal{A}(1,0) = \frac{1}{2}(1,1)$ a $\mathcal{A}(0,1) = \frac{1}{2}(1,1)$. Restrikce zobrazení $\mathcal{A}$ na $\mathbb{R}^2$ tedy kolmo promítá vektory z $\mathbb{R}^2$ do lineárního podprostoru $\langle (1,1) \rangle$. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory $\mathcal{A}$. Matice $\mathcal{A}$ vzhledem ke standardní bázi lze odečíst přímo ze zadání:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hledejme její vlastní čísla a vektory. Charakteristický polynom $\mathbf{A}$ je:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1/2 - \lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 - \lambda \end{vmatrix} = (1/2 - \lambda)^2 - 1/4 = -\lambda + \lambda^2 = \lambda(\lambda - 1)\,.$$

Vlastní čísla $\mathbf{A}$ (a tedy i $\mathcal{A}$) jsou kořeny tohoto polynomu, tj. 0 a 1. Pro tyto hodnoty bude mít soustava $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ netriviální řešení (to jsou hledané vlastní vektory). Pro $\lambda = 1$ vypadá tato soustava takto:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Jejím řešením je lineární obal $\langle (1,1) \rangle$. Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 1 jsou nenulové vektory z množiny $\langle (1,1) \rangle$.

Pro $\lambda = 0$ vypadá tato soustava takto:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Jejím řešením je lineární obal $\langle (-1,1) \rangle$. Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 1 jsou nenulové vektory z množiny $\langle (-1,1) \rangle$.

Našli jsme tedy vlastní vektory matice $\mathbf{A}$ lineárního zobrazení $\mathcal{A} \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ vzhledem ke standardní bázi. Vlastní vektory zobrazení $\mathcal{A}$ nyní podle Věty 2 odpovídají vektorům z $\mathbb{C}^2$ jejichž souřadnice ve standardní bázi jsou dané vlastními vektory matice $\mathbf{A}$. Takže např.

vlastní vektor $(-1,1)$ matice $\mathbf{A}$ odpovídá vlastnímu vektoru $-1\cdot(1,0)+1\cdot(0,1)=(-1,1)$ zobrazení $\mathcal{A}$. Vidíte, že v tomto případě jsou oba vektory shodné. To je důsledek toho, že matice $\mathbf{A}$ reprezentuje $\mathcal{A}$ vzhledem ke standardní bázi. Podobně vektor $(1,1)$ je zároveň vlastním vektorem zobrazení $\mathcal{A}$.

Jak jsme zmínili výše, pokud najdeme bázi sestavenou z vlastních vektorů lineárního zobrazení, víme že matice tohoto lineárního zobrazení vzhledem k této bázi bude diagonální. V případě zobrazení $\mathcal{A}$ jsme našli dvojici vlastních vektorů $((1,1),(-1,1))$, která tvoří uspořádanou bázi $\mathbb{C}^2$. Označme ji (B). Matice $\mathbf{D}$ lineárního zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázi (B) by tedy měla být diagonální. Skutečně tomu tak je, protože $\mathcal{A}(1,1)=(1,1)$ a $\mathcal{A}(-1,1)=(0,0)$. Navíc $[(1,1)]_B=(1,0)$ a $[(0,0)]_B=(0,0)$. Takže

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

Geometricky to odpovídá tomu, že vektory na přímce $\langle(1,1)\rangle$ zobrazení $\mathcal{A}$ nemění a vektory ležící na kolmé přímce $\langle(-1,1)\rangle$ zobrazení $\mathcal{A}$ posílá do nulového vektoru.

V předchozím příkladě jsme viděli, že pokud najdeme mezi vlastními vektory lineárního zobrazení lineárně nezávislou množinu takovou, aby tvořila bázi, je možné toto lineární zobrazení reprezentovat pomocí diagonální matice. Bohužel někdy se stává, že těch vlastních vektorů není “dost” na to, aby z nich šla vybrat báze, viz následující příklad.

Příklad 3 Hledejme vlastní čísla a vektory matice

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&4&-3\\-1&10&-6\\-1&8&-4\end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom $\mathbf{A}$ je

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})=\begin{vmatrix}2-\lambda&4&-3\\-1&10-\lambda&-6\\-1&8&-4-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-3)^2(\lambda-2)\,.$$

Máme tedy dvojnásobné vlastní číslo 3 a jednonásobné 2.

Vlastní vektory příslušné $\lambda=3$:

$$\begin{pmatrix}-1&4&-3\\-1&7&-6\\-1&8&-7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&4&-3\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

Řešení této soustavy je $\langle(1,1,1)\rangle$.

Vlastní vektory příslušné $\lambda=2$:

$$\begin{pmatrix}0&4&-3\\-1&8&-6\\-1&8&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&8&-6\\0&4&-3\end{pmatrix}$$

Řešení této soustavy je $\langle(0,3,4)\rangle$.

Vidíme, že mezi $\langle(1,1,1)\rangle \cup \langle(0,3,4)\rangle$ lze najít maximálně dvouprvkou lineárně nezávislou množinu, např. $\{(1,1,1),(0,3,4)\}$. To znamená, že lineární zobrazení $\mathcal{A}\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ definované vztahem $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{x}$ nelze reprezentovat diagonální maticí. Skutečně, kdyby to šlo, pak by existovala báze $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ taková, že $\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{b}_i = \lambda_i \boldsymbol{b}_i$ pro nějaká $\lambda_i \in \mathbb{C}$ a $i \in \{1,2,3\}$. To by ale znamenalo, že $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ je tříprvková lin. nezávislá množina vlastních vektorů matice $\mathbf{A}$. Taková ale neexistuje, jak jsem zjistili výše.

Následující věta nám dává dostatečnou podmínku k tomu, aby bylo možné mezi vlastními vektory lineárního zobrazení nalézt bázi.

Věta 3 *Pro jakoukoliv množinu navzájem různých vlastních čísel lineárního zobrazení (matice) je množina příslušných vlastních vektorů lineárně nezávislá.*

Důkaz: Indukcí podle počtu vlastních čísel. Nechť $\mathcal{A}\colon L \to L$ je lineární zobrazení. Množina obsahující jeden vlastní vektor $\mathcal{A}$ je LN, protože vlastní vektor je z definice nenulový. Předpokládejme, že věta platí jakoukoliv množinu k různých vlastních čísel $\mathcal{A}$. Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$ jsou navzájem různá vlastní čísla $\mathcal{A}$ a $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{k+1}$ příslušné vlastní vektory. Abychom ukázali, že $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{k+1}\}$ je LN, musíme ukázat, že jediné řešení následující rovnice jsou samé nuly:

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{x}_k + \alpha_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{o}\,. \tag{1}$$

Aplikací $\mathcal{A}$ na obě strany (1) dostaneme:

$$\alpha_1 \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) + \cdots + \alpha_k \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_k) + \alpha_{k+1}\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_{k+1}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}\,.$$

Protože $\boldsymbol{x}_i$ jsou vlastní vektory $\mathcal{A}$ můžeme přepsat předchozí rovnost na:

$$\alpha_1 \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_k \lambda_k \boldsymbol{x}_k + \alpha_{k+1}\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{o}\,. \tag{2}$$

Dále vynásobení obou stran (1) číslem λ_{k+1} dostaneme:

$$\alpha_1 \lambda_{k+1} \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_k \lambda_{k+1} \boldsymbol{x}_k + \alpha_{k+1}\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{o}\,. \tag{3}$$

Odečtením rovnice (2) od (3) obdržíme:

$$\alpha_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1)\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\boldsymbol{x}_k + \alpha_{k+1}\underbrace{(\lambda_{k+1} - \lambda_{k+1})}_{=0}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{o}\,. \tag{4}$$

Protože $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ je LN z našeho předpokladu a $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$ pro $i \in \{1, \ldots, k\}$, musí platit $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Dosazením zpět do rovnice (1) dostaneme $\alpha_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{o}$. Protože $\boldsymbol{x}_{k+1} \neq \boldsymbol{o}$, musí platit $\alpha_{k+1} = 0$.

Pro matice funguje stejný důkaz, stačí si uvědomit, že každá čtvercová matice $\mathbf{A}$ typu (n,n) definuje lineární zobrazení $\mathcal{A}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ předpisem $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{x}$. □

Důsledek 1 *Nechť $\mathcal{A}\colon L \to L$ je lineární zobrazení jehož vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou navzájem různá. Pak diagonální matice $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ je matice lineárního zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázi $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$, kde $\boldsymbol{x}_i$ je libovolný vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_i.*

Příklad 4 Nechť L je lineární prostor reálných polynomů stupně nejvýše dva a $\mathcal{A}\colon L \to L$ lineární zobrazení definované vztahem $\mathcal{A}(a_0+a_1x+a_2x^2) = (2a_0-a_1-a_2)-a_1x+(2a_1+a_2)x^2$. Rozhodněte, jestli existuje báze vůči, které má $\mathcal{A}$ diagonální matici.

Matice zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázi $(1, x, x^2)$ je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Najdeme vlastní čísla $\mathbf{A}$:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda).$$

Vlastní čísla tedy jsou $1, -1, 2$. Protože všechna vlastní čísla jsou navzájem různá, je diagonální matice $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(1, -1, 2)$ maticí lineárního zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázi (B) sestavené z vlastních vektorů příslušných postupně vlastním číslům $1, -1, 2$. Najdeme tuto bázi.

Vlastní vektory příslušné $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastní vektory příslušné $\lambda = 1$ jsou tedy nenulové vektory z $\langle(1, 0, 1)\rangle$.

Pro $\lambda = -1$ máme:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vlastní vektory příslušné $\lambda = -1$ jsou tedy nenulové vektory z $\langle(0, -1, 1)\rangle$.

Pro $\lambda = 2$ máme:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastní vektory příslušné $\lambda = 2$ jsou tedy nenulové vektory z $\langle(1, 0, 0)\rangle$.

Našli jsme vlastní vektory matice $\mathbf{A}$. Vlastní vektory zobrazení $\mathcal{A}$ získáme tak, že použijeme vlastní vektory $(1, 0, 1), (0, -1, 1), (1, 0, 0)$ matice $\mathbf{A}$ jako souřadnice v bázi $(1, x, x^2)$. Hledaná báze $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ tedy je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}_1 &= 1\cdot 1 + 0\cdot x + 1\cdot x^2 = 1 + x^2, \\ \boldsymbol{b}_2 &= 0\cdot 1 - 1\cdot x + 1\cdot x^2 = -x + x^2, \\ \boldsymbol{b}_3 &= 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 = 1. \end{aligned}$$

Ověřte si, že skutečně platí $\mathcal{A}(1+x^2) = 1\cdot(1+x^2)$, $\mathcal{A}(-x+x^2) = -1\cdot(-x+x^2)$ a $\mathcal{A}(1) = 2\cdot 1$.

3 Podobné matice

Nechť L je lineární prostor dimenze n, $\mathcal{A}\colon L \to L$ je lineární zobrazení a $\mathbf{A}$ matice $\mathcal{A}$ vzhledem k nějaké bázi (B). Řekněme, že $\mathcal{A}$ je možné reprezentovat také jinou maticí $\mathbf{A}'$ vzhledem k nějaké bázi (C). Jaký je vztah mezi těmito maticemi?

Připomeňme, že matice $\mathbf{A}$ splňuje pro všechny $\boldsymbol{x} \in L$ rovnost $[\mathcal{A}(\boldsymbol{x})]_B = \mathbf{A} \cdot [\boldsymbol{x}]_B$. Nechť $\mathbf{I}$ je matice identického zobrazení vzhledem k bázím (C) a (B) (tj. $\mathbf{I}$ je matice přechodu od báze (B) k bázi (C)). Pak $\mathbf{I} \cdot [\boldsymbol{x}]_C = [\boldsymbol{x}]_B$. Dosazením do $[\mathcal{A}(\boldsymbol{x})]_B = \mathbf{A} \cdot [\boldsymbol{x}]_B$, dostaneme $\mathbf{I} \cdot [\mathcal{A}(\boldsymbol{x})]_C = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} \cdot [\boldsymbol{x}]_C$. Vynásobením $\mathbf{I}^{-1}$ zleva zjistíme, že $[\mathcal{A}(\boldsymbol{x})]_C = \mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} \cdot [\boldsymbol{x}]_C$. To znamená, že $\mathbf{A}' = \mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}$. Skutečně, i-tý sloupec matice $\mathbf{A}'$ je roven $[\mathcal{A}(\boldsymbol{c}_i)]_C = \mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} \cdot [\boldsymbol{c_i}]_C$, kde $\boldsymbol{c}_i$ je i-tý vektor báze (C). Protože souřadnice c_i v bázi (C) je vektor samých nul až na i-tou složku, která je rovna jedné, je součin $\mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} \cdot [\boldsymbol{c_i}]_C$ roven i-tému sloupci matice $\mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}$.

Vzhledem k tomu, že matice přechodu je regularní matice a každá regulární matice představuje nějakou matici přechodu, má smysl zavést následující definici.

Definice 5 *Nechť* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *jsou čtvercové matice stejného typu. Pak matice* $\mathbf{A}$ *je* podobná *matici* $\mathbf{B}$*, pokud existuje regulární matice* $\mathbf{P}$ *taková, že platí* $\mathbf{P} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$*, tj.* $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$*.*

Všimněte si, že každá matice je podobná sama sobě, protože $\mathbf{E}$ je regulární matice a $\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}$. Dále, pokud je $\mathbf{A}$ podobná $\mathbf{B}$, je také $\mathbf{B}$ podobná $\mathbf{A}$. Skutečně, pokud $\mathbf{P} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$ pro nějakou regulární matici, pak $\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{P}^{-1}$.

Věta 4 *Dvě podobné matice* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *mají stejné charakteristické polynomy, tj. stejná vlastní čísla.*

Důkaz: Protože $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou podobné, existuje regulární matice $\mathbf{P}$ taková, že $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$. Z toho plyne následující rovnost:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}) = \det(\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} - \lambda\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{P}) &= \det(\mathbf{P}^{-1} \cdot (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}) = \\ &= \det(\mathbf{P}^{-1}) \cdot \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \cdot \det(\mathbf{P}) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\,.\end{aligned}$$

Poslední rovnost plyne z faktu, že $1 = \det(\mathbf{E}) = \det(\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{-1}) = \det(\mathbf{P}) \cdot \det(\mathbf{P}^{-1})$, tj. $\det(\mathbf{P}^{-1}) = 1/\det(\mathbf{P})$. □

Použitím výsledků z předchozí části o lineárních zobrazení dostaneme následující větu.

Věta 5 *Nechť* $\mathbf{A}$ *je čtvercová matice typu* (n, n) *a* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$*. Pak* $\mathbf{A}$ *je podobná diagonální matici* $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *právě tehdy, když* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *jsou vlastní čísla* $\mathbf{A}$ *a existuje báze* $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ *lineárního prostoru* $\mathbb{C}^n$*, kde* $\boldsymbol{b}_i$ *je vlastní vektor matice* $\mathbf{A}$ *příslušný vlastnímu číslu* λ_i*.*

Navíc pokud $\mathbf{A}$ *je podobná* $\mathbf{D}$*, pak* $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$*, kde i-tý sloupec matice* $\mathbf{P}$ *je roven vlastnímu vektoru* $\boldsymbol{b}_i$*.*

Důkaz: Nechť $\mathcal{A}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ je lineární zobrazení definované vztahem $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x}$. Pak $\mathbf{A}$ je matice $\mathcal{A}$ vzhledem ke standardní bázi.

($\Rightarrow$): Pokud je $\mathbf{A}$ podobná $\mathbf{D}$, pak $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$ pro nějakou regulární matici $\mathbf{P}$. Protože sloupce matice $\mathbf{P}$ tvoří LN posloupnost, je tato posloupnost uspořádaná báze $\mathbb{C}^n$. Označme ji $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$, tj. $\boldsymbol{b}_i$ je i-tý sloupec $\mathbf{P}$. Nechť $(E) = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ je standardní báze $\mathbb{C}^n$.

Pak můžeme matici $\mathbf{P}$ chápat jako matici identického zobrazení vzhledem k (B) a (E), tj. $[\boldsymbol{x}]_E = \mathbf{P} \cdot [\boldsymbol{x}]_B$ pro $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$. Uvědomte si, že pro $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ se zobrazení $[\ ]_E$ chová jako identita, tj. $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}]_E$.

Ukážeme, že matice $\mathbf{D}$ je matice lineárního zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázi (B). Protože i-tý sloupec matice $\mathbf{D}$ můžeme vyjádřit jako $\mathbf{D} \cdot [\boldsymbol{b}_i]_B$, dostaneme:

$$\begin{aligned}\mathbf{D} \cdot [\boldsymbol{b}_i]_B = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} \cdot [\boldsymbol{b}_i]_B = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot [\boldsymbol{b}_i]_E = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{b}_i = \\ = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_i) = \mathbf{P}^{-1} \cdot [\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_i)]_E = [\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_i)]_B \,,\end{aligned}$$

což znamená, že $\mathbf{D}$ je skutečně matice lineárního zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázi (B). Podle Věty 1 to znamená, že $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla $\mathcal{A}$ a $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ příslušné vlastní vektory. Protože vlastní čísla a vektory $\mathcal{A}$ a $\mathbf{A}$ jsou shodné, jsme hotovi.

($\Leftarrow$): Předpokládejme, že $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla $\mathbf{A}$ a příslušné vlastní vektory $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ tvoří bázi (B). Pak podle věty 1 matice $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ je matice lineárního zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázi (B). Pak $[\mathcal{A}(\boldsymbol{x})]_B = \mathbf{D} \cdot [\boldsymbol{x}]_B$ pro $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$. Nechť $\mathbf{P}$ je matice jejíž sloupce jsou $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$. Pak $\mathbf{P}$ je matice identického zobrazení vzhledem k bázím (B) a (E). Použitím těchto faktů dostaneme:

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{e}_i = [\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{e}_i]_E = \mathbf{P} \cdot [\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{e}_i]_B = \mathbf{P} \cdot [\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_i)]_B = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot [\boldsymbol{e}_i]_B = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot [\boldsymbol{e}_i]_E = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \boldsymbol{e}_i \,,$$

což znamená, že i-tý sloupec matice $\mathbf{A}$ je stejný jako i-tý sloupec matice $\mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$. Protože výše uvedená rovnost platí pro všechny $i \in \{1, \ldots, n\}$, musí platit $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$, tj. $\mathbf{A}$ je podobná $\mathbf{D}$. $\square$

Z věty 3 potom plyne následující dostačující podmínka pro matici, aby byla podobná diagonální matici.

Důsledek 2 *Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice typu (n, n) jejíž vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou navzájem různá. Pak $\mathbf{A}$ je podobná diagonální matici $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, tj. $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$, kde sloupce $\mathbf{P}$ jsou vlastní vektory příslušné postupně vlastním číslům $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.*

Příklad 5 V příkladu 1 jsme měli lineární zobrazení $\mathcal{A}$ s maticí

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Zjistili jsme, že vlastní čísla $\mathbf{A}$ jsou $1, 0$ a jejich příslušné vlastní vektory $(1, 1)$ a $(-1, 1)$. Podle věty 5 je tedy matice $\mathbf{A}$ podobná diagonální matici

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

a $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$, kde sloupce $\mathbf{P}$ jsou sestaveny z vlastních vektorů, tj.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Příklad 6 V příkladu 4 jsme měli lineární zobrazení $\mathcal{A}$ s maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Zjistili jsme, že vlastní čísla $\mathbf{A}$ jsou $1, -1, 2$ a jejich příslušné vlastní vektory $(1, 0, 1), (0, -1, 1), (1, 0, 0)$. Podle věty 5 je tedy matice $\mathbf{A}$ podobná diagonální matici

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ,$$

a $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$, kde sloupce $\mathbf{P}$ jsou sestaveny z vlastních vektorů, tj.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$