

1 Determinanty a inverzní matice

Definice 1 Necht' $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matice typu (n, n) , $n \geq 2$. Subdeterminantem A_{ij} matice $\mathbf{A}$ příslušným pozici (i, j) nazýváme determinant matice, která vznikne z $\mathbf{A}$ vypuštěním i -tého řádku a j -tého sloupce. Doplnkem D_{ij} nazýváme číslo $D_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$.

Věta 1 Necht' $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matice typu (n, n) , $n \geq 2$. Pak pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\det \mathbf{A} = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \dots + a_{in}D_{in}.$$

Navíc pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$, $j \neq i$, máme

$$a_{i1}D_{j1} + a_{i2}D_{j2} + \dots + a_{in}D_{jn} = 0.$$

Příklad

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 2 \end{vmatrix} &= 4 \cdot D_{23} = 4 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -4 \cdot 3 \cdot D_{21} = \\ &= -12 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-2 - 6) = -96 \end{aligned}$$

Věta 2 Necht' $\mathbf{A}$ je matice typu (n, n) . Pak $\mathbf{A}$ je regulární p.t.k. $\det \mathbf{A} \neq 0$.

DŮKAZ: Předpokládejme, že $\det \mathbf{A} = 0$ a $\mathbf{A}$ je regulární (tj. $\mathbf{A}^{-1}$ existuje). Pak

$$1 = \det \mathbf{E} = \det (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{A}^{-1} = 0 \cdot \det \mathbf{A}^{-1} = 0,$$

což je spor.

Předpokládejme, že $\det \mathbf{A} \neq 0$. Pak ukážeme, že

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (D_{ij})^T,$$

kde $(D_{ij})^T$ je transponovaná matice všech doplňků matice $\mathbf{A}$. Označme $\mathbf{B} = (D_{ij})^T$ a vypočteme $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} = (c_{ij})$. Pak

$$c_{ij} = a_{i1}D_{j1} + a_{i2}D_{j2} + \dots + a_{in}D_{jn} = \begin{cases} \det \mathbf{A} & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j. \end{cases}$$

Takže $\mathbf{C} = (\det \mathbf{A}) \cdot \mathbf{E}$. Podobně se ukáže, že $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = (\det \mathbf{A}) \cdot \mathbf{E}$. □

Příklad Necht' $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je obecná matice typu $(2, 2)$. Pak $\det \mathbf{A} = ad - bc$. Pokud $ad - bc \neq 0$, potom

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} (D_{ij})^T = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

2 Soustavy lineárních rovnic

Mějme soustavu m lineárních rovnic o n neznámých:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \quad (1)$$

Pokud označíme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

pak místo (1) můžeme psát stručněji $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Matici $\mathbf{A}$ nazýváme maticí soustavy (1), vektor $\mathbf{b}^T = (b_1, \dots, b_m)$ vektorem pravých stran a vektor $\mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n)$ vektorem neznámých. Matici $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ nazýváme rozšířenou maticí soustavy.

Poznámka 1 Ačkoliv $\mathbf{x}$ a $\mathbf{b}$ jsou jednosloupcové matice a ne vektory, budeme s nimi běžně pracovat jako s vektory, protože je většinou z kontextu jasné, kdy je máme chápat jako jednosloupcové matice.

Všiměme si také, že soustava (1) lze přepsat takto:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

To znamená, že pokud vektor $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ je jejím řešením, pak vlastně vektor $\mathbf{b}$ je lineární kombinací sloupců matice $\mathbf{A}$ a koeficienty této lineární kombinace jsou právě $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Věta 3 (Frobeniova) Soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení p.t.k. $\text{hod } \mathbf{A} = \text{hod } (\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$.

DŮKAZ: Vektor $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ je řešením soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ p.t.k. $\mathbf{b}$ je lineární kombinací sloupců $\mathbf{A}$ s koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. To znamená, že soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení p.t.k. $\mathbf{b}^T \in \langle r : \mathbf{A}^T \rangle$ to je p.t.k. $\left\langle r : \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{b}^T \end{pmatrix} \right\rangle = \langle r : \mathbf{A}^T \rangle$ a to je p.t.k. $\text{hod } \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{b}^T \end{pmatrix} = \text{hod } \mathbf{A}^T$.

Protože pro každou matici $\mathbf{B}$ máme $\text{hod } \mathbf{B}^T = \text{hod } \mathbf{B}$, dostaneme $\text{hod } (\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \text{hod } \mathbf{A}$. $\square$

Definice 2 Necht' $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{d}$ jsou soustavy lineárních rovnic. Říkáme, že tyto soustavy jsou ekvivalentní, pokud mají stejné množiny řešení.

Věta 4 Ke každé soustavě $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ lze nalézt ekvivalentní soustavu $\mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{d}$, kde $\mathbf{C}$ je horní trojúhelníková.

DŮKAZ: Zřejmě $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{C} \mid \mathbf{d})$, kde $\mathbf{C}$ je horní trojúhelníková. Stačí tedy ukázat, že soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{d}$ jsou ekvivalentní. Protože $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{C} \mid \mathbf{d})$, existuje regulární matice $\mathbf{P}$ t.ž.

$$(\mathbf{C} \mid \mathbf{d}) = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{P} \cdot \mathbf{b}).$$

Takže $\mathbf{C} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}$ a $\mathbf{d} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{b}$.

Nechť $\mathbf{a}$ je řešení soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, tj. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}$. Pak $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{b}$, tj. $\mathbf{C} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{d}$. Obráceně, nechť $\mathbf{z}$ je řešením $\mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{d}$. Pak $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{b}$. Vynásobením maticí $\mathbf{P}^{-1}$ zleva dostaneme $\mathbf{A} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{b}$. $\square$

Definice 3 Nechť $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ je soustava lin. rovnic a $\mathbf{b} = \mathbf{o}$. Pak nazýváme tuto soustavu homogenní.

Věta 5 Množina M řešení homogenní soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ o n neznámých tvoří lin. podprostor lin. prostoru $\mathbb{R}^n$.

DŮKAZ: Zřejmě $\mathbf{o} \in M$. Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in M$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}$ a $\mathbf{A} \cdot (\alpha \cdot \mathbf{u}) = \alpha \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}) = \alpha \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o}$. Takže $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in M$ a $\alpha \cdot \mathbf{u} \in M$. $\square$

Věta 6 Nechť $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ je homogenní soustava lin. rovnic o n neznámých a $M = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{o}\}$. Pak $\dim M = n - \text{hod } \mathbf{A}$.

DŮKAZ: Víme, že $(\mathbf{A} \mid \mathbf{o}) \sim (\mathbf{C} \mid \mathbf{o})$, kde $\mathbf{C}$ je horní trojúhelníková, jejíž počet nenulových řádků je $\text{hod } \mathbf{A}$. Na popis řešení budeme tedy potřebovat $k = n - \text{hod } \mathbf{A}$ parametrů $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}$. Nechť tedy $x_{i_1} = p_1, \dots, x_{i_k} = p_k$. Protože vektor pravých stran je nulový, můžeme ostatní složky řešení vyjádřit jako lineární kombinace parametrů $p_1, \dots, p_k$. To znamená, že libovolné řešení můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$(x_1, \dots, x_n) = p_1 \mathbf{u}_1 + \dots + p_k \mathbf{u}_k.$$

Takže $M = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$. Zbývá ukázat, že $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ je LN. Nechť

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{u}_k = \mathbf{o}.$$

Protože $\mathbf{u}_1$ má na pozici i_1 číslo 1 a ostatní vektory $\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ nulu, platí pro i_1 složku $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \dots + \alpha_k \cdot 0 = 0$, tj. $\alpha_1 = 0$. Podobně ukážeme, že i $\alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$. $\square$

Příklad Najděte bázi a dimenzi lin. prostoru M všech řešení následující homogenní soustavy lin. rovnic:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Nechť $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$. Volme $x_5 = p_1$ a $x_4 = p_2$. Z rovnice $x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0$ dostaneme $x_3 = -2p_2 - 3p_1$. Dále volme $x_2 = p_3$. Z rovnice $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0$ dostaneme

$$x_1 = -2p_3 - 3(-2p_2 - 3p_1) - 4p_2 - 5p_1 = -2p_3 + 2p_2 + 4p_1.$$

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= (-2p_3 + 2p_2 + 4p_1, p_3, -2p_2 - 3p_1, p_2, p_1) = \\ &= p_1(4, 0, -3, 0, 1) + p_2(2, 0, -2, 1, 0) + p_3(-2, 1, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

Množina $\{(4, 0, -3, 0, 1), (2, 0, -2, 1, 0), (-2, 1, 0, 0, 0)\}$ je báze lin. prostoru M a $\dim M = 3$. Ukažme, že $\{(4, 0, -3, 0, 1), (2, 0, -2, 1, 0), (-2, 1, 0, 0, 0)\}$ je LN.

$$\alpha_1(4, 0, -3, 0, 1) + \alpha_2(2, 0, -2, 1, 0) + \alpha_3(-2, 1, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0, 0).$$

Ukážeme např. že $\alpha_2 = 0$. Parametr p_2 odpovídá čtvrté složce řešení x_4 . Pro čtvrtou složku z předchozí rovnice tedy máme $\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 0 = 0$, tj. $\alpha_2 = 0$.

Definice 4 *Nechť $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ je nehomogenní soustava lin. rovnic a $\mathbf{v}$ je jedno její řešení. Pak $\mathbf{v}$ nazýváme partikulární řešení a soustavu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ nazýváme přidruženou homogenní soustavou k $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.*

Věta 7 *Nechť $\mathbf{v}$ je partikulární řešení soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a M_0 je lin. prostor řešení přidružené homogenní soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$. Pak pro množinu M všech řešení $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ platí:*

$$M = \{\mathbf{v} + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in M_0\}.$$

DŮKAZ: Nejprve ukážeme, že $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ je řešení pro libovolný vektor $\mathbf{u} \in M_0$. Máme

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b} + \mathbf{o} = \mathbf{b}.$$

Nyní ukážeme, že každé řešení $\mathbf{w} \in M$ lze vyjádřit ve tvaru $\mathbf{v} + \mathbf{u}'$ pro nějaký vektor $\mathbf{u}' \in M_0$. Volme $\mathbf{u}' = \mathbf{w} - \mathbf{v}$. Vektor $\mathbf{u}' \in M_0$, protože

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}' = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{v}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{o}.$$

Vzhledem k tomu, že $\mathbf{v} + \mathbf{u}' = \mathbf{v} + (\mathbf{w} - \mathbf{v}) = \mathbf{w}$, důkaz je hotov. $\square$

Pokud $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ je báze lin. prostoru M_0 všech řešení přidružené homogenní soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$, pak množinu řešení soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ obvykle zapisujeme takto:

$$M = \mathbf{v} + M_0 = \mathbf{v} + \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle.$$

Věta 8 (Cramerovo pravidlo) *Nechť $\mathbf{A}$ je regulární čtvercová matice. Pak pro i -tou složku řešení soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ platí*

$$\alpha_i = \frac{\det \mathbf{B}_i}{\det \mathbf{A}},$$

kde matice $\mathbf{B}_i$ je shodná s maticí $\mathbf{A}$ až na i -tý sloupec, který je nahrazen sloupcem pravých stran $\mathbf{b}$.

DŮKAZ: Protože $\mathbf{A}$ je regulární, máme $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$. Dále pro inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ platí:

$$\mathbf{A}^{-1} = (c_{ij}) = \left(\frac{D_{ji}}{\det \mathbf{A}} \right), \quad \text{kde } (D_{ij}) \text{ je matice doplňků k matici } \mathbf{A}.$$

Nechť $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$, pak

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} b_j = \sum_{j=1}^n \frac{D_{ji}}{\det \mathbf{A}} b_j = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (D_{1i} b_1 + \dots + D_{ni} b_n) = \frac{\det \mathbf{B}_i}{\det \mathbf{A}}.$$

$\square$

Příklad Pro následující soustavu spočtěte neznámou x_2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{0 + 0 + 0 - (3 + 0 + 0)}{0 + 2 + 9 - (6 + 1 + 0)} = -\frac{3}{4}.$$

3 Maticové rovnice

Algoritmus Gaussovy eliminační metody lze jednoduše zobecnit na maticové rovnice tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$. Necht' $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ jsou sloupce matice $\mathbf{B}$ a $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ sloupce matice $\mathbf{X}$. Všiměme si, že rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ je ekvivalentní s k -ticí rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k$, protože i -tý sloupec součinu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$ závisí pouze na i -tém sloupci $\mathbf{x}_i$. Rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i$ jsou již normální soustavy lin. rovnic. Vzhledem k tomu, že mají všechny stejnou matici soustavy, lze je řešit jednou eliminací najednou, jen musíme matici soustavy rozšířit o všechny pravé strany $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$. Postupujeme takto:

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \mid \mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_k) \sim (\mathbf{C} \mid \mathbf{d}_1 \cdots \mathbf{d}_k),$$

kde $\mathbf{C}$ je horní trojúhelníková. Každý sloupec $\mathbf{x}_i$ matice $\mathbf{X}$ potom vyjádříme nezávisle ze soustavy $(\mathbf{C} \mid \mathbf{d}_i)$.

Příklad Řešte rovnici $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Sloupec $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}$ získáme ze soustavy $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$. Necht' $x_{31} = p$, $p \in \mathbb{R}$. Z druhé rovnice $x_{21} + x_{31} = 0$ plyne $x_{21} = -p$. Z první rovnice $x_{11} + 2x_{21} + 4x_{31} = -1$ plyne $x_{11} = -1 - 2p$.

Podobně sloupec $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix}$ získáme ze soustavy $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$. Necht' $x_{32} = t$, $t \in \mathbb{R}$. Z druhé rovnice $x_{22} + x_{32} = 1$ plyne $x_{22} = 1 - t$. Z první rovnice $x_{12} + 2x_{22} + 4x_{32} = 0$ plyne $x_{12} = -2 - 2t$. Dohromady

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 - 2p & -2 - 2t \\ -p & 1 - t \\ p & t \end{pmatrix}, \quad p, t \in \mathbb{R}.$$

Metodu je možné upravit i na rovnice tvaru $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Pomocí transpozice převedeme rovnici na $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{X}^T = \mathbf{B}^T$. Pomocí předchozího postupu nalezneme $\mathbf{X}^T$, tj. eliminuje matici $(\mathbf{A}^T \mid \mathbf{B}^T)$, a nakonec opět pomocí transpozice získáme $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^T)^T$.