1 Lineární prostory

Definice 1 *Lineárním prostorem nazýváme každou neprázdnou množinu L, na které je definováno sčítání $+ : L \times L \to L$ a násobení reálným číslem $\cdot : \mathbb{R} \times L \to L$ a tyto operace splňují pro každé $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in L$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vlastnosti:*

1.	$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$	*komutativita* $+$
2.	$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$	*asociativita* $+$
3.	$\alpha \cdot (\beta \cdot \boldsymbol{x}) = (\alpha\beta) \cdot \boldsymbol{x}$	*asociativita* $\cdot$
4.	$\alpha \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha \cdot \boldsymbol{x} + \alpha \cdot \boldsymbol{y}$	*distributivita*
5.	$(\alpha + \beta) \cdot \boldsymbol{x} = \alpha \cdot \boldsymbol{x} + \beta \cdot \boldsymbol{x}$	*distributivita*
6.	$1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$	*neutrální prvek pro* $\cdot$
7.	*existuje* $\boldsymbol{o} \in L$*, že pro každé* $\boldsymbol{x} \in L$ *je* $0 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$	*existence nulového prvku.*

Prvkům z množiny L říkáme vektory. Prvek $\boldsymbol{o}$ se nazývá nulový vektor. Reálnému číslu ve výrazu $\alpha \cdot \boldsymbol{x}$ říkáme skalár.

Příklad "Středoškolské vektory v rovině" tj. množina šipek vedoucích z počátku do libovolného bodu roviny tvoří lineární prostor, když definujeme operaci sčítání přes doplnění na rovnoběžník a násobení skalárem α jako odpovídající prodloužení (zkrácení) šipky a v případě že $\alpha < 0$ ještě navíc otočení šipky o 180 stupňů.

Příklad Nechť F_X je množina všech zobrazení z množiny X do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$. Pak F_X tvoří lineární prostor s operacemi $+ : F_X \times F_X \to F_X$ a násobení reálným číslem $\cdot : \mathbb{R} \times F_X \to F_X$. Z první přednášky víme, že všechny vlastnosti 1–6 z definice lineárního prostoru to splňuje. Konstatní zobrazení $\bar{0} : X \to \mathbb{R}$ funguje jako nulový vektor, protože $0 \cdot f = \bar{0}$.

Rozmysleme si, že uspořádané n-tice reálných čísel můžeme chápat, jako zobrazení z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ do množiny reálných čísel. Např. uspořádanou pětici $(3, 1, 2, -1, 7)$ můžeme chápat jako zobrazení $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{R}$ takové, že $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $f(4) = -1$ a $f(5) = 7$.

Příklad Množina uspořádaných n-tic reálných čísel $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ tvoří lineární prostor, pokud definujeme operace $+, \cdot$ takto:

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)\,,$$

$$\alpha \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n)\,.$$

Fakt, že to je lineární prostor plyne ze skutečnosti, že toto je vlastně jen speciální případ předchozího lin. prostoru F_X, kde $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Nulový vektor je v tomto případě uspořádaná n-tice $(0, \ldots, 0)$.

Věta 1 *V každém lineárním prostoru L platí:*

1. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{x} \qquad \forall x \in L$
2. $\alpha \cdot \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. *Je-li* $\alpha \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ *a* $\alpha \neq 0$*, pak* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$*.*

Důkaz:

1. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{o} \overset{7.}{=} \boldsymbol{x} + 0 \cdot \boldsymbol{x} \overset{6.}{=} 1 \cdot \boldsymbol{x} + 0 \cdot \boldsymbol{x} \overset{5.}{=} (1+0) \cdot \boldsymbol{x} = 1 \cdot \boldsymbol{x} \overset{6.}{=} \boldsymbol{x}$.
2. $\alpha \cdot \boldsymbol{o} \overset{7.}{=} \alpha \cdot (0 \cdot \boldsymbol{x}) \overset{3.}{=} (\alpha \cdot 0) \cdot \boldsymbol{x} = 0 \cdot \boldsymbol{x} \overset{7.}{=} \mathbf{0}$.
3. $\boldsymbol{x} = 1 \cdot \boldsymbol{x} = \left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right) \cdot \boldsymbol{x} \overset{3.}{=} \frac{1}{\alpha} \cdot (\alpha \cdot \boldsymbol{x}) = \frac{1}{\alpha} \cdot \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$.

$\square$

Definice 2 *Neprázdná podmnožina M lineárního prostoru L se nazývá lineárním podprostorem prostoru L, pokud pro všechna $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:*

1. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in M$*,*

2. $\alpha \cdot \boldsymbol{x} \in M$*.*

Příklad Množina $P_{\mathbb{R}}$ je lin. podprostor lin. prostoru $F_{\mathbb{R}}$, protože součet dvou polynomů je opět polynom a α-násobek polynomu je také polynom.

Příklad Množina reálných polynomů stupně nejvýše n je lin. podprostor lin. prostoru $P_{\mathbb{R}}$, protože $\operatorname{st}(f+g) \le \max\{\operatorname{st} f, \operatorname{st} g\} \le n$ a $\operatorname{st}(\alpha \cdot f) \le \operatorname{st} f \le n$.

Příklad Množina reálných polynomů stupně právě 3 není lin. podprostor lin. prostoru $P_{\mathbb{R}}$, protože např. $\operatorname{st}(0 \cdot f) = \operatorname{st} \bar{0} = -1 \ne 3$.

Příklad Množina $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$ je lin. podprostor lin. prostoru $\mathbb{R}^3$. Nechť $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in M$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Ukážeme, že $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in M$ a $(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) \in M$.

$$2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = (2x_1 + y_1 - z_1) + (2x_2 + y_2 - z_2) = 0 + 0 = 0\,.$$

$$2(\alpha x_1) + (\alpha y_1) - (\alpha z_1) = \alpha(2x_1 + y_1 - z_1) = \alpha\, 0 = 0\,.$$

Příklad Množina $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 3\}$ není lin. podprostor lin. prostoru $\mathbb{R}^3$. Např. $0 \cdot (x,y,z) = (0,0,0)$, ale $(0,0,0) \notin M$, protože $2 \cdot 0 + 0 - 0 = 0 \ne 3$.

Věta 2 *Nechť $M, N \subseteq L$ jsou lin. podprostory lin. prostoru L. Pak*

1. $M \cap N$ *je lineární podprostor* L*,*

2. $M \cup N$ *nemusí být lineární podprostor* L*.*

Důkaz:

1. Nechť $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M \cap N$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Z vlastnosti průniku máme $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M$ a $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in N$. Protože M, N jsou lin. podprostory, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in M$ a $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in N$. To ale znamená, že $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in M \cap N$. Podobně $\alpha \cdot \boldsymbol{x} \in M$ a $\alpha \cdot \boldsymbol{x} \in N$. Tudíž $\alpha \cdot \boldsymbol{x} \in M \cap N$.
2. Nechť $M = \{(a, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$ a $N = \{(0, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b \in \mathbb{R}\}$. Pak M i N jsou zřejmě podprostory $\mathbb{R}^2$. Nicméně $M \cup N$ není podprostor $\mathbb{R}^2$, protože např. $(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin M \cup N$.

$\square$

2 Lineární závislost a nezávislost

Definice 3 *Nechť L je lineární prostor a $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in L$. Lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ rozumíme vektor:*

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n \,,$$

kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se nazývají koeficienty lineární kombinace.

Pokud $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ nazýváme lineární kombinaci triviální. V opačném případě netriviální.

Pozorování 1 *Triviální lineární kombinace je vždy rovna nulovému vektoru.*

Definice 4 *Konečnou posloupnost (skupinu) vektorů $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ nazýváme lineárně závislou (LZ), pokud existuje netriviální lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, která je rovna nulovému vektoru. V opačném případě ji nazýváme lineárně nezávislou (LN).*

Konečná posloupnost vektorů $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ je tedy LZ, pokud existují $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ alespoň jedno $\alpha_i \neq 0$ a platí:

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{o} \,. \tag{1}$$

Naopak $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ je LN, pokud jediná možnost jak splnit rovnici (1) je $\alpha_1 = \cdots \alpha_n = 0$.

Příklad Vektory $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ z lin. prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou LN, protože

$$\alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1) = \boldsymbol{o}$$

$$(\alpha_1, 0, 0) + (0, \alpha_2, 0) + (0, 0, \alpha_3) = (0, 0, 0)$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$$

Příklad Vektory $(1, 2, 3)$, $(1, 0, 2)$, $(-1, 4, 0)$ z lin. prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou LZ, protože

$$\alpha_1(1, 2, 3) + \alpha_2(1, 0, 2) + \alpha_3(-1, 4, 0) = (0, 0, 0)$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, 2\alpha_1 + 4\alpha_3, 3\alpha_1 + 2\alpha_2) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & + & \alpha_2 & - & \alpha_3 & = & 0 \\ 2\alpha_1 & & & + & 4\alpha_3 & = & 0 \\ 3\alpha_1 & + & 2\alpha_2 & & & = & 0 \end{array}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení. Vyjádřeno s parametrem $p \in \mathbb{R}$ máme $\alpha_3 = p$, $\alpha_2 = 3p$ a $\alpha_1 = -2p$. Existuje tedy i jiné řešení než jen samé nuly např. pro $p = 1$ máme $\alpha_3 = 1$, $\alpha_2 = 3$ a $\alpha_1 = -2$ tj.

$$-2(1, 2, 3) + 3(1, 0, 2) + 1(-1, 4, 0) = (0, 0, 0) \,.$$

Věta 3 *Nechť $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ je konečná posloupnost vektorů lin. prostoru L. Pak*

1. *Lineární závislost či nezávislost se nezmění při změně pořadí vektorů $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$.*

2. *Jestliže $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{o}$ pro nějaké $i \in \{1, \ldots, n\}$, pak je $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ LZ.*

3. *Jestliže $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_j$ pro $i \neq j$, pak je $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ LZ.*

4. *Jestliže je $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ LZ a $\boldsymbol{x}_{n+1} \in L$, pak je $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_{n+1}$ LZ.*

5. *Jestliže je $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ LN, pak je $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}$ LN.*

6. *Konečná posloupnost $\boldsymbol{x}_1$ je LN p.t.k. $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{o}$.*

DŮKAZ:

1. Plyne z komutativity sčítání vektorů.

2. Vzhledem k předchozí vlastnosti můžeme předpokládat bez újmy na obecnosti, že $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{o}$. Pak
$$1 \cdot \boldsymbol{o} + 0 \cdot \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{o}$$

3. Opět můžeme předpokládat, že $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$. Pak
$$1 \cdot \boldsymbol{x}_1 + (-1) \cdot \boldsymbol{x}_2 + 0 \cdot \boldsymbol{x}_3 + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{x}_n = (1-1) \cdot \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{o}$$

4. Pokud $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou koeficienty netriviální lin. kombinace vektorů $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, pak
$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n + 0 \cdot \boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{o} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$$

5. Sporem: předpokládejme, že $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}$ je LZ. Pak podle předchozího tvrzení musí být i $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ LZ, což je spor s předpokladem tvrzení.

6. Obě implikace dokážeme nepřímo. ($\Rightarrow$) Pokud $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{o}$ pak $\boldsymbol{x}_1$ je LZ podle 2. tvrzení. ($\Leftarrow$) Pokud $\boldsymbol{x}_1$ je LZ, pak $\alpha \cdot \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{o}$ pro nějaké $\alpha \neq 0$. Takže podle Věty 1 máme $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{o}$.

□

Věta 4 *Nechť $n \geq 2$. Konečná posloupnost vektorů $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ je LZ p.t.k. $\exists\ r \in \{1, \ldots, n\}$ t.ž. $\boldsymbol{x}_r$ je roven lineární kombinaci ostatních vektorů.*

DŮKAZ: ($\Rightarrow$) Pokud $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ je LZ, pak existují $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ alespoň jedno $\alpha_r \neq 0$ t.ž.
$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_r \boldsymbol{x}_r + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{o}\,.$$
$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_r \boldsymbol{x}_r + (-\alpha_r) \boldsymbol{x}_r + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n = -\alpha_r \boldsymbol{x}_r\,.$$
$$\sum_{i=1,\, i\neq r}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = -\alpha_r \boldsymbol{x}_r\,.$$
$$\sum_{i=1,\, i\neq r}^{n} \frac{\alpha_i}{-\alpha_r} \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_r\,.$$

($\Leftarrow$) Předpokládáme tedy, že
$$\boldsymbol{x}_r = \sum_{i=1,\, i\neq r}^{n} \beta_i \boldsymbol{x}_i\,.$$
$$\sum_{i=1,\, i\neq r}^{n} \beta_i \boldsymbol{x}_i + (-1) \boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{o}\,.$$
Což je netriviální lineární kominace, protože koeficient u $\boldsymbol{x}_r$ je -1. □