1 Příklad

Zadaní

Nechť P, N jsou binární predikátové symboly,

$$\varphi = \forall x \forall y \Big(P(x,y) \Leftrightarrow \big(\forall z (N(z,x) \Rightarrow N(z,y))\big)\Big)\,,$$

$$\psi = \forall x \forall y \forall z \Big((P(x,y) \wedge P(y,z)) \Rightarrow P(x,z)\Big)\,.$$

Pomocí rezoluční metody ukažte, že $\varphi \models \psi$.

Poznamenejme, že φ je vlastně definice podmnožiny a ψ vyjadřuje tranzitivitu relace "být podmnožinou". Formálně zapsáno s běžnými symboly by to vypadalo takto:

$$\varphi = \forall x \forall y \Big(x \subseteq y \;\Leftrightarrow\; \big(\forall z (z \in x \Rightarrow z \in y)\big)\Big)\,,$$

$$\psi = \forall x \forall y \forall z \Big((x \subseteq y \;\wedge\; y \subseteq z) \Rightarrow x \subseteq z\Big)\,.$$

Řešení

Budeme se tedy ptát, jestli je množina $\{\varphi, \neg\psi\}$ nesplnitelná. Obě formule φ i $\neg\psi$ musíme převést do PCNF. Nejprve převedeme φ do PCNF.

1. $\varphi = \forall x \forall y \Big(P(x,y) \Leftrightarrow \forall z (N(z,x) \Rightarrow N(z,y))\Big)$.
2. Přepíšeme ekvivalenci pomocí vztahu $(\alpha \Leftrightarrow \beta) \;\Leftrightarrow\; ((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha))$.

$$\forall x \forall y \Bigg(\Big(P(x,y) \Rightarrow \forall z (N(z,x) \Rightarrow N(z,y))\Big) \wedge \Big(\forall z (N(z,x) \Rightarrow N(z,y)) \Rightarrow P(x,y)\Big)\Bigg)\,.$$

3. Přejmenujeme proměnné tak, aby každý kvantifikátor vázal jinou proměnnou.

$$\forall x \forall y \Bigg(\Big(P(x,y) \Rightarrow \forall z (N(z,x) \Rightarrow N(z,y))\Big) \wedge \Big(\forall w (N(w,x) \Rightarrow N(w,y)) \Rightarrow P(x,y)\Big)\Bigg)\,.$$

4. Distribuce kvantifikátorů.

$$\forall x \forall y \Bigg(\forall z \Big(P(x,y) \Rightarrow (N(z,x) \Rightarrow N(z,y))\Big) \wedge \exists w \Big((N(w,x) \Rightarrow N(w,y)) \Rightarrow P(x,y)\Big)\Bigg)\,.$$

5. Distribuce kvantifikátorů. Z důvodů pracnosti kvantifikátor $\exists w$ přesunuji první, aby odpovídající skolemovská funkce měla co nejméně proměnných.

$$\forall x \forall y \exists w \forall z \Bigg(\Big(P(x,y) \Rightarrow (N(z,x) \Rightarrow N(z,y))\Big) \wedge \Big((N(w,x) \Rightarrow N(w,y)) \Rightarrow P(x,y)\Big)\Bigg)\,.$$

6. Přepíšeme implikaci pomocí vztahu $(\alpha \Rightarrow \beta) \;\Leftrightarrow\; (\neg\alpha \vee \beta)$.

$$\forall x \forall y \exists w \forall z \Bigg(\Big(\neg P(x,y) \vee \neg N(z,x) \vee N(z,y)\Big) \wedge \Big(\neg(\neg N(w,x) \vee N(w,y)) \vee P(x,y)\Big)\Bigg)\,.$$

7. De Morganův zákon $\neg(\alpha \vee \beta) \;\Leftrightarrow\; (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ a zákon dvojí negace $\neg\neg\alpha \;\Leftrightarrow\; \alpha$.

$$\forall x \forall y \exists w \forall z \Big(\big(\neg P(x,y) \vee \neg N(z,x) \vee N(z,y)\big) \wedge \big((N(w,x) \wedge \neg N(w,y)) \vee P(x,y)\big)\Big)\,.$$

8. Distributivní zákon $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \;\Leftrightarrow\; (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$.

$$\forall x \forall y \exists w \forall z \Big(\big(\neg P(x,y) \vee \neg N(z,x) \vee N(z,y)\big) \wedge \big(N(w,x) \vee P(x,y)\big) \wedge \big(\neg N(w,y) \vee P(x,y)\big)\Big)\,.$$

9. Zavedení skolemovské funkce f pro w.

$$\forall x \forall y \forall z \Big(\big(\neg P(x,y) \vee \neg N(z,x) \vee N(z,y)\big) \wedge \big(N(f(x,y),x) \vee P(x,y)\big) \wedge \big(\neg N(f(x,y),y) \vee P(x,y)\big)\Big)\,.$$

10. Distribuce kvantifikátorů přes $\wedge$ pomocí vztahu $\forall x(\alpha \wedge \beta) \;\Leftrightarrow\; (\forall x \alpha) \wedge (\forall x \beta)$.

$$\begin{aligned} &\forall x \forall y \forall z \big(\neg P(x,y) \vee \neg N(z,x) \vee N(z,y)\big) \wedge \\ &\qquad \wedge\; \forall x \forall y \forall z \big(N(f(x,y),x) \vee P(x,y)\big) \;\wedge\; \forall x \forall y \forall z \big(\neg N(f(x,y),y) \vee P(x,y)\big)\,. \end{aligned}$$

11. Odpovídající množina klausulí tedy je (použitím konvence o vynechávání univerzálních kvantifikátorů):

$$S_\varphi = \{\neg P(x,y) \vee \neg N(z,x) \vee N(z,y),\; N(f(x,y),x) \vee P(x,y), \neg N(f(x,y),y) \vee P(x,y)\}\,.$$

Podobně převedeme $\neg\psi$.

1. $\neg\psi = \neg \forall x \forall y \forall z \big((P(x,y) \wedge P(y,z)) \Rightarrow P(x,z)\big)$.

2. Distribuce kvantifikátorů přes $\neg$.

$$\exists x \exists y \exists z \neg \big((P(x,y) \wedge P(y,z)) \Rightarrow P(x,z)\big)\,.$$

3. Přepíšeme implikaci pomocí vztahu $(\alpha \Rightarrow \beta) \;\Leftrightarrow\; (\neg\alpha \vee \beta)$.

$$\exists x \exists y \exists z \neg \big(\neg(P(x,y) \wedge P(y,z)) \vee P(x,z)\big)\,.$$

4. De Morganův zákon $\neg(\alpha \vee \beta) \;\Leftrightarrow\; (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ a zákon dvojí negace $\neg\neg\alpha \;\Leftrightarrow\; \alpha$.

$$\exists x \exists y \exists z \big(P(x,y) \wedge P(y,z) \wedge \neg P(x,z)\big)\,.$$

5. Zavedení skolemovských konstant a, b, c pro x, y, z.

$$P(a,b) \wedge P(b,c) \wedge \neg P(a,c)\,.$$

6. Odpovídající množina klausulí tedy je:

$$S_\psi = \{P(a,b),\; P(b,c),\; \neg P(a,c)\}\,.$$

Máme tedy ekvisplnitelnou množinu klausulí $S = S_\varphi \cup S_\psi$, na kterou můžeme pustit rezoluční metodu.

1.	$\neg P(x,y) \vee \neg N(z,x) \vee N(z,y)$	
2.	$N(f(x,y),x) \vee P(x,y)$	
3.	$\neg N(f(x,y),y) \vee P(x,y)$	
4.	$P(a,b)$	
5.	$P(b,c)$	
6.	$\neg P(a,c)$	
7.	$\neg N(z,a) \vee N(z,b)$	1,4,$\{x/a, y/b\}$
8.	$\neg N(z,b) \vee N(z,c)$	1,5,$\{x/b, y/c\}$
9.	$N(f(a,c),a)$	2,6,$\{x/a, y/c\}$
10.	$\neg N(f(a,c),c)$	3,6,$\{x/a, y/c\}$
11.	$N(f(a,c),b)$	7,9,$\{z/f(a,c)\}$
12.	$N(f(a,c),c)$	8,11,$\{z/f(a,c)\}$
13.	F	10,12

Zjistili jsme tedy, že S je nesplnitelná množina. Množina $\{\varphi, \neg\psi\}$ je tedy také nesplnitelná, a proto $\varphi \models \psi$.

2 Příklad

Zadaní

Rozhodněte, jestli je následující úsudek správný:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Všechna auta jsou dopravní prostředky.}\\ \text{Všechna auta mají volant.}\end{array}}{\text{Některé dopravní prostředky mají volant.}}$$

Řešení

Nejprve zformalizujeme věty v zadaném úsudku. Zavedeme tři unární predikátové symboly A, D, V pro vlastnosti "být auto", "být dopravní prostředek" a "mít volant". Formálně přepsaný úsudek vypadá takto:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(A(x) \Rightarrow D(x))\\ \forall x(A(x) \Rightarrow V(x))\end{array}}{\exists x(D(x) \wedge V(x))}$$

Označme postupně výše napsané sentence řeckými písmeny φ, ψ, α. Naším úkolem je rozhodnout jestli z množiny $\{\varphi, \psi\}$ vyplývá sentence α, tj. $\{\varphi, \psi\} \models \alpha$. Musíme tedy zjistit, jestli je množina $\{\varphi, \psi, \neg\alpha\}$ nesplnitelná.

Najdeme ke každé ze sentencí $\varphi, \psi, \neg\alpha$ ekvisplnitelné množiny klausulí $S_\varphi, S_\psi, S_\alpha$. Implikaci v sentencích φ, ψ nahradíme pomocí disjunkce a negace. Výsledné formule jsou již klausule.

$$S_\varphi = \{\neg A(x) \vee D(x)\}\,, \qquad S_\psi = \{\neg A(x) \vee V(x)\}\,.$$

U sentence $\neg\alpha$ přehodíme negaci přes existenční kvantifikátor, který se tím promění na univerzální, tj. $\forall x \neg(D(x) \wedge V(x))$. De Morganovy zákony již vyrobí klausuli.

$$S_\alpha = \{\neg D(x) \vee \neg V(x)\}\,.$$

Ptáme se tedy, jestli je nesplnitelná množina klausulí

$$S = \{\neg A(x) \vee D(x), \neg A(x) \vee V(x), \neg D(x) \vee \neg V(x)\}\,.$$

Nyní použijeme rezoluční metodu.

1.	$\neg A(x) \vee D(x)$	
2.	$\neg A(x) \vee V(x)$	
3.	$\neg D(x) \vee \neg V(x)$	
4.	$\neg A(x) \vee \neg V(x)$	1,3
5.	$\neg A(x) \vee \neg D(x)$	2,3
6.	$\neg A(x)$	1,5

Vidíme, že žádné další klausule nejde vyrobit. Tudíž je množina S splnitelná a sentence α nevyplývá z množiny $\{\varphi, \psi\}$, tj. $\{\varphi, \psi\} \not\models \alpha$. Úsudek tedy není správný.

Poslední odvozená klausule $\forall x \neg A(x)$ také napovídá, proč je tento úsudek nesprávný. Kdybychom k množině předpokladů $\{\varphi, \psi\}$ přidali ještě sentenci $\exists x\, A(x)$ (která po skolemizaci přejde na $A(a)$), tak bychom prázdnou klausuli F v rezoluční metodě dostali. Ke správnosti úsudku by tedy stačilo navíc předpokládat, že existuje alespoň jedno auto. Pokud totiž žádné auto neexistuje (např. před 1000 lety žádná auta neexistovala), jsou oba předpoklady φ, ψ triviálně splněny, ale závěr α platit nemusí.

3 Příklad

Zadaní

Pomocí rezoluční metody ukažte, že následující formule je kontradikce:

$$\varphi = \exists x \forall y (N(y,x) \Leftrightarrow \neg N(y,y)) \,.$$

Poznamenejme, že se jedná o formalizaci Russelova paradoxu, pokud interpretujeme predikátový symbol N jako "být prvkem". Zapsáno pomocí běžných symbolů by to vypadalo takto:

$$\exists x \forall y (y \in x \;\Leftrightarrow\; y \notin y) \,.$$

Tato sentence tedy vlastně říká, že existuje množina x taková, že prvek y do ní patří právě tehdy, když nepatří sám do sebe.

Řešení

Protože pojem kontradikce splývá s pojem nesplnitelné sentence, stačí tedy zjistit, jestli je množina $\{\varphi\}$ nesplnitelná. Vyrobíme ekvisplnitelnou množinu klausulí S_φ.

1. $f = \exists x \forall y (N(y,x) \Leftrightarrow \neg N(y,y))$.

2. Nahradíme ekvivalenci konjunkcí dvou implikací:

$$\exists x \forall y \Big((N(y,x) \Rightarrow \neg N(y,y)) \wedge (\neg N(y,y) \Rightarrow N(y,x)) \Big) \,.$$

3. Nahradíme implikace pomocí disjunkce a negace:

$$\exists x \forall y \Big((\neg N(y,x) \vee \neg N(y,y)) \wedge (N(y,y) \vee N(y,x)) \Big) \,.$$

4. Zavedeme skolemovskou konstantu a a odstraníme existenční kvantifikátor:

$$\forall y \Big((\neg N(y,a) \vee \neg N(y,y)) \wedge (N(y,y) \vee N(y,a)) \Big) \,.$$

5. Přesuneme univerzální kvantifikátor k argumentům konjunkce:

$$\forall y (\neg N(y,a) \vee \neg N(y,y)) \wedge \forall y (N(y,y) \vee N(y,a)) \,.$$

6. Ekvisplnitelná množina klausulí tedy je:

$$S_\varphi = \{\neg N(y,a) \vee \neg N(y,y),\ N(y,y) \vee N(y,a)\}\,.$$

Nyní můžeme zjistit pomocí rezoluční metody, jestli je S_φ nesplnitelná.

1.	$\neg N(y,a) \vee \neg N(y,y)$	
2.	$N(y',y') \vee N(y',a)$	přejmenovali jsme rovnou proměnou y
3.	F	1,2,$\{y/a, y'/a\}$

Vysvětleme, co se vlastně nahoře stalo. Je zřejmé, že nemělo smysl dělat resolventy odstraněním literálů $\neg N(y,a), N(y',a)$ nebo $\neg N(y,y), N(y',y')$, protože bychom dostali akorát tautologie. Jediné, co tedy zbývá, je hledat unifikaci literálů $\neg N(y,a), N(y',y')$ nebo $\neg N(y,y), N(y',a)$. Uvažujme např. první dvojici. Dostaneme dvojici termových rovnic $y' = y$ a $y' = a$. Nahradíme všechny výskyty proměnné y' mimo poslední rovnici termem a, tj. $a = y$ a $y' = a$. Otočením první rovnice dostáváme soustavu ve vyřešeném tvaru, tj. $y = a$ a $y' = a$. Nejobecnější unifikace tedy je $\sigma = \{y/a, y'/a\}$. Použitím této unifikace na jednotlivé klausule dostaneme:

$$(\neg N(y,a) \vee \neg N(y,y))\sigma = \neg N(a,a) \vee \neg N(a,a)\,, \qquad (N(y',y') \vee N(y',a))\sigma = N(a,a) \vee N(a,a)\,.$$

Kdybychom nyní odstranili z klausulí pouze dva komplementární literály, dostali bychom opět tautologii. V tomto případě je totiž potřeba použít rezoluční pravidlo v jeho plné obecnosti (viz slidy z přednášky) a odstranit všechny unifikované literály. Tím obdržíme ihned prázdnou klausuli F.

4 Příklad

Predikátovou logiku a rezoluční metodu je možné využívat také v databázích (jedná se o tzv. deduktivní databáze). Tabulky v nějaké databázi nejsou nic jiného než nějaké relace. Je tedy možné formálním jazykem predikátové logiky se databáze zeptat, jestli něco o těchto relacích platí. Rezoluční metoda (nebo spíše její modifikace) nám potom naši otázku zodpoví. Ukážeme si to na jednoduchém příkladě.

Zadaní

Mějme skupinu osob Ray, Ken, Sue, Tim, Sam, Jack, o kterých máme tato data:

rodič	potomek
Ray	Ken
Ray	Sue
Sue	Tim
Sue	Sam
Sam	Jack

Naším úkolem je zformalizovat tuto znalost pomocí predikátové logiky a rezoluční metodou zjistit, jestli je Ray pradědeček Jacka.

Řešení

Abychom mohli naše znalosti zformalizovat, musíme si určit v jakém to uděláme jazyce. Možností je více, ukažme si jednu z nich. Určitě musíme mít v našem jazyce konstantní symboly pro jednotlivé osoby, tj. $ray, ken, sue, tim, sam, jack$. Dále musíme mít v jazyce binární predikátový symbol $R(x,y)$, který bude vyjadřovat, že x je rodič y. Tabulku s daty můžeme pak zachytit pomocí těchto atomických formulí

$$M = \{R(ray,ken), R(ray,sue), R(sue,tim), R(sue,sam), R(sam,jack)\}\,.$$

V tomto jazyce už bychom mohli zformalizovat otázku, jestli je Ray pradědečkem Jacka (jak by ona formule vypadala?). Nicméně udělejme to jinak, abychom si ukázali jak definovat další pojmy pomocí symbolu R. Přidáme do našeho jazyka další binární predikát $P(x, y)$ vyjadřující fakt, že x je prarodičem y, tj. x je buď dědeček nebo babička y. Aby to tak skutečně bylo musíme, predikát P nějak svázat s predikátem R. To uděláme pomocí této sentence:

$$\varphi = \forall x \forall y \big(P(x, y) \Leftrightarrow \exists z(R(x, z) \wedge R(z, y))\big)\,,$$

vyjadřující fakt, že x je prarodič y právě tehdy, když existuje z takové, že x je rodič z a z je rodič y. Naše otázka, jestli je Ray pradědeček Jacka lze potom zformalizovat takto:

$$\psi = \exists x(R(ray, x) \wedge P(x, jack))\,,$$

která říká, že existuje x takové, že Ray je rodič x a x je prarodič Jacka. Pokud je tato formule pravdivá za předpokladu našich znalostí, pak je skutečně Ray pradědeček Jacka v opačném případě nikoli (pokud jsou naše informace v tabulce úplné). Z hlediska predikátové logiky se ptáme zda-li platí $M \cup \{\varphi\} \models \psi$. Rozhodneme pomocí rezoluční metody, jestli tento konsekvent platí. Ptáme se tedy, jestli je množina $M \cup \{\varphi, \neg\psi\}$ nesplnitelná.

Nejprve musíme nalézt ekvisplnitelnou množinu klausulí. Formule v M již jsou klausule, stačí se tedy postarat o φ a $\neg\psi$. Začneme s φ tím, že odstraníme ekvivalenci:

$$\forall x \forall y \Big(\big(P(x, y) \Rightarrow \exists z(R(x, z) \wedge R(z, y))\big) \wedge \big(\exists z(R(x, z) \wedge R(z, y)) \Rightarrow P(x, y)\big)\Big)\,.$$

Přejmenujeme proměnné, aby každý kvantifikátor vázal jinou proměnnou:

$$\forall x \forall y \Big(\big(P(x, y) \Rightarrow \exists z(R(x, z) \wedge R(z, y))\big) \wedge \big(\exists u(R(x, u) \wedge R(u, y)) \Rightarrow P(x, y)\big)\Big)\,.$$

Najdeme prenexní tvar:

$$\forall x \forall y \exists z \forall u \Big(\big(P(x, y) \Rightarrow (R(x, z) \wedge R(z, y))\big) \wedge \big((R(x, u) \wedge R(u, y)) \Rightarrow P(x, y)\big)\Big)\,.$$

Odstraníme implikace:

$$\forall x \forall y \exists z \forall u \Big(\big(\neg P(x, y) \vee (R(x, z) \wedge R(z, y))\big) \wedge \big(\neg(R(x, u) \wedge R(u, y)) \vee P(x, y)\big)\Big)\,.$$

Převedeme do PCNF:

$$\forall x \forall y \exists z \forall u \Big(\big((\neg P(x, y) \vee R(x, z)) \wedge (\neg P(x, y) \vee R(z, y))\big) \wedge \big(\neg R(x, u) \vee \neg R(u, y) \vee P(x, y)\big)\Big)\,.$$

Skolemizace:

$$\forall x \forall y \forall u \Big(\big((\neg P(x, y) \vee R(x, f(x, y))) \wedge (\neg P(x, y) \vee R(f(x, y), y))\big) \wedge \big(\neg R(x, u) \vee \neg R(u, y) \vee P(x, y)\big)\Big)\,.$$

Ekvisplnitelná množina klausulí pro φ tedy je:

$$S_\varphi = \{\neg P(x, y) \vee R(x, f(x, y)),\ \neg P(x, y) \vee R(f(x, y), y),\ \neg R(x, u) \vee \neg R(u, y) \vee P(x, y)\}\,.$$

Podobně postupujeme s $\neg\psi = \neg\exists x(R(ray, x) \wedge P(x, jack))$. Vyrobíme prenexní tvar:

$$\forall x \neg(R(ray, x) \wedge P(x, jack))\,.$$

Převedeme do PCNF:

$$\forall x(\neg R(ray, x) \vee \neg P(x, jack))\,.$$

Ekvisplnitelná množina klausulí pro $\neg\psi$ tedy je:

$$S_{\neg\psi} = \{\neg R(ray, x) \vee \neg P(x, jack)\}\,.$$

Nyní můžeme na $M \cup S_\varphi \cup S_{\neg\psi}$ pustit rezoluční metodu.

1.	$R(ray, ken)$	
2.	$R(ray, sue)$	
3.	$R(sue, tim)$	
4.	$R(sue, sam)$	
5.	$R(sam, jack)$	
6.	$\neg P(x, y) \vee R(x, f(x, y))$	
7.	$\neg P(x, y) \vee R(f(x, y), y)$	
8.	$\neg R(x, u) \vee \neg R(u, y) \vee P(x, y)$	
9.	$\neg R(ray, x') \vee \neg P(x', jack)$	přejmenovali jsme proměnnou x na x' (i když zde to není třeba)
10.	$\neg R(x, u) \vee \neg R(u, jack) \vee \neg R(ray, x)$	8,9,$\{x'/x, y/jack\}$
11.	$\neg R(x, sam) \vee \neg R(ray, x)$	5,10,$\{u/sam\}$
12.	$\neg R(ray, sue)$	4,11,$\{x/sue\}$
13.	F	2,12

Množina $M \cup S_\varphi \cup S_{\neg\psi}$ je tedy nesplnitelná, a tudíž je konsekvent $M \cup \{\varphi\} \models \psi$, tj. Ray je tedy pradědečkem Jacka.

My se ale nemusí ptát naší databáze jen na otázky typu ano/ne. Pomocí rezoluční metody lze zjistit i konkrétní hodnoty. Např. ptejme se, kdo je vnuk nebo vnučka Ray. Pomocí predikátové logiky můžeme zformalizovat otázku typu: existuje vnuk nebo vnučka Raye? Jde o sentenci $\psi = \exists x\, P(ray, x)$. Pomocí rezoluční metody můžeme zjistit platnost tohoto konsekventu $M \cup S_\varphi \models \psi$, kde M a S_φ jsou stejné jako předtím. Ekvisplnitelná množina klausulí pro $\neg\psi$ je $S_{\neg\psi} = \{\neg P(ray, x)\}$. Rezoluční metoda dává:

1.	$R(ray, ken)$	
2.	$R(ray, sue)$	
3.	$R(sue, tim)$	
4.	$R(sue, sam)$	
5.	$R(sam, jack)$	
6.	$\neg P(x, y) \vee R(x, f(x, y))$	
7.	$\neg P(x, y) \vee R(f(x, y), y)$	
8.	$\neg R(x, u) \vee \neg R(u, y) \vee P(x, y)$	
9.	$\neg P(ray, x')$	přejmenovali jsme proměnnou x na x'
10.	$\neg R(ray, u) \vee \neg R(u, x')$	8,9,$\{x/ray, y/x'\}$
11.	$\neg R(sue, x')$	2,10,$\{u/sue\}$
12.	F	3,11,$\{x'/tim\}$

Pomocí rezoluční metody jsme tedy zjistili, že Ray má vnuka nebo vnučku. Navíc můžeme z běhu rezoluční metody, zjistit kdo to je. Náš znegovaný závěr je $\neg P(ray, x')$. Rezoluční metoda zjistila, co je třeba dosadit za x', abychom dostali spor F. To je vidět v posledním kroku, kde používáme substituci $\{x'/tim\}$. Ray má tedy vnuka Tima.

Všimněte si, že v tomto případě jsme proměnnou x v 9. řádku důkazu museli přejmenovat. Kdybychom tak neučinili, hledali bychom unifikaci $P(x, y)$ a $P(ray, x)$. Unifikace těchto atomických formulí je $\{x/ray, y/ray\}$. Důkaz by potom pokračoval takto:

1.	$R(ray, ken)$	
2.	$R(ray, sue)$	
3.	$R(sue, tim)$	
4.	$R(sue, sam)$	
5.	$R(sam, jack)$	
6.	$\neg P(x, y) \vee R(x, f(x, y))$	
7.	$\neg P(x, y) \vee R(f(x, y), y)$	
8.	$\neg R(x, u) \vee \neg R(u, y) \vee P(x, y)$	
9.	$\neg P(ray, x)$	
10.	$\neg R(ray, u) \vee \neg R(u, ray)$	8,9,$\{x/ray, y/ray\}$
11.	$\neg R(sue, ray)$	2,10,$\{u/sue\}$

Vidíme, že dál nelze pokračovat, protože $R(sue, ray) \notin M$. Resolventa na 10. řádku totiž ztratila na obecnosti, díky nevhodné substituci. V prvním případě jsme z předpokladů vyvodili, že Sue není rodičem jakékoliv osoby našem univerzu. V druhém případě jsme dostali jen speciální případ, že Sue není rodičem Raye.

5 Příklad

Zadaní

Tento příklad je ukázkou toho, že dokazování rezoluční metodou není pro člověka příliš vhodné. Ukažte, že platí $M \models \varphi$, kde

$$\begin{aligned}
M &= \{\forall x \forall y\, R(h(x,y), h(y,x))\,, \\
&\quad \forall x \forall y \forall z\, R(h(x, h(y,z)), h(h(x,y),z))\,, \\
&\quad \forall x\, R(h(x,0), x)\,, \\
&\quad \forall x \exists y\, R(h(x,y), 0)\,, \\
&\quad \forall x\, R(x,x)\,, \\
&\quad \forall x \forall y (R(x,y) \Rightarrow R(y,x))\,, \\
&\quad \forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \Rightarrow R(x,z))\,, \\
&\quad \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \Rightarrow R(h(x,z), h(y,z)))\}\,, \\
\\
\varphi &= \forall x \forall y \forall z (R(h(y,x), h(z,x)) \Rightarrow R(y,z))\,.
\end{aligned}$$

Řešení

Odpovídající ekvisplnitelná množina klausulí pro množinu $M \cup \{\neg\varphi\}$ je

$$\begin{aligned}
S &= \{R(h(x,y), h(y,x))\,, \\
&\quad R(h(x, h(y,z)), h(h(x,y),z))\,, \\
&\quad R(h(x,0), x)\,, \\
&\quad R(h(x, f(x)), 0)\,, \\
&\quad R(x,x)\,, \\
&\quad \neg R(x,y) \vee R(y,x)\,, \\
&\quad \neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee R(x,z)\,, \\
&\quad \neg R(x,y) \vee R(h(x,z), h(y,z))\,, \\
&\quad R(h(b,a), h(c,a))\,, \\
&\quad \neg R(b,c)\}\,.
\end{aligned}$$

Průběh rezoluční metody je následující:

1.	$R(h(x,y),h(y,x))$	
2.	$R(h(x,h(y,z)),h(h(x,y),z))$	
3.	$R(h(x,0),x)$	
4.	$R(h(x,f(x)),0)$	
5.	$R(x,x)$	
6.	$\neg R(x,y) \vee R(y,x)$	
7.	$\neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee R(x,z)$	
8.	$\neg R(x,y) \vee R(h(x,z),h(y,z))$	
9.	$R(h(b,a),h(c,a))$	
10.	$\neg R(b,c)$	
11.	$\neg R(x',y') \vee R(y',x')$	6 přejmenování
12.	$R(0,h(x,f(x)))$	4,11,$\{x'/h(x,f(x)),y'/0\}$
13.	$R(x,h(x,0))$	3,11,$\{x'/h(x,0),y'/x\}$
14.	$R(h(h(x,y),z),h(x,h(y,z)))$	2,11,$\{x'/h(x,h(y,z)),y'/h(h(x,y),z)\}$
15.	$\neg R(x',y') \vee \neg R(y',z) \vee R(x',z)$	7 přejmenování
16.	$\neg R(h(y,x),z) \vee R(h(x,y),z)$	1,15,$\{x'/h(x,y),y'/h(y,x)\}$
17.	$\neg R(h(y',x'),z') \vee R(h(x',y'),z')$	16 přejmenování
18.	$R(h(h(y,z),x),h(h(x,y),z))$	2,17$\{x'/h(y,z),y'/x,z'/h(h(x,y),z)\}$
19.	$\neg R(x',y) \vee R(h(x',z),h(y,z))$	8 přejmenování
20.	$R(h(h(x,f(x)),z),h(0,z))$	4,19,$\{x'/h(x,f(x)),y/0\}$
21.	$R(h(h(b,a),z),h(h(c,a),z))$	8,9,$\{x/h(b,a),y/h(c,a)\}$
22.	$R(h(x',0),x')$	3 přejmenování
23.	$\neg R(x,h(x',0)) \vee R(x,x')$	7,22,$\{y/h(x',0),z/x'\}$
24.	$\neg R(b,h(c,0))$	10,23,$\{x/b,x'/c\}$
25.	$\neg R(x',y') \vee R(h(x',z),h(y',z))$	8 přejmenování
26.	$R(h(0,z),h(h(x,f(x)),z))$	11,25,$\{x'/0,y'/h(x,f(x))\}$
27.	$\neg R(x',h(x,y)) \vee R(x',h(y,x))$	1,15,$\{y'/h(x,y),z/h(y,x)\}$
28.	$\neg R(b,h(0,c))$	24,27,$\{x'/b,y/c,x/0\}$
29.	$\neg R(h(x,0),z) \vee R(x,z)$	13,15,$\{x'/x,y'/h(x,0)\}$
30.	$\neg R(h(x',0),z) \vee R(x',z)$	29 přejmenování
31.	$R(x,h(0,x))$	1,30,$\{x'/x,y/0,z/h(0,x)\}$
32.	$\neg R(x',y') \vee \neg R(y',z') \vee R(x',z')$	7 přejmenování
33.	$\neg R(h(x,h(y,z)),z') \vee R(h(h(x,y),z),z')$	14,32,$\{x'/h(h(x,y),z),y'/h(x,h(y,z))\}$
34.	$R(h(x'',y''),h(y'',x''))$	1 přejmenování
35.	$R(h(h(x,y),z),h(h(y,z),x))$	33,34,$\{x''/x,y''/h(y,z),z'/h(h(y,z),x)\}$
36.	$\neg R(x',h(h(x,f(x)),z)) \vee R(x',h(0,z))$	20,32,$\{y'/h(h(x,f(x)),z),z'/h(0,z)\}$
37.	$\neg R(b,h(h(x,f(x)),c))$	28,36,$\{x'/b,z/c\}$
38.	$\neg R(h(0,x),z) \vee R(x,z)$	15,31,$\{x'/x,y'/h(0,x)\}$
39.	$\neg R(h(0,x'),z') \vee R(x',z')$	38 přejmenování
40.	$R(z,h(h(x,f(x)),z))$	26,39,$\{x'/z,z'/h(h(x,f(x)),z)\}$
41.	$\neg R(h(h(x,f(x)),z),z') \vee R(z,z')$	32,40,$\{x'/z,y'/h(h(x,f(x)),z)\}$
42.	$R(h(h(y'',z''),x''),h(h(x'',y''),z''))$	18 přejmenování
43.	$R(z,h(h(z,x),f(x)))$	41,42,$\{x''/z,y''/x,z''/f(x),z'/h(h(z,x),f(x))\}$
44.	$\neg R(x',h(h(x,y),z)) \vee R(x',h(h(y,z),x))$	32,40,$\{y'/h(h(x,y),z),z'/h(h(y,z),x)\}$
45.	$\neg R(b,h(h(x'',f(x'')),c))$	37 přejmenování
46.	$\neg R(b,h(h(c,y),f(y)))$	44,45,$\{x/c,x'/b,x''/y,z/f(y)\}$
47.	$\neg R(h(h(z,x),f(x)),z') \vee R(z,z')$	32,43,$\{x'/z,y'/h(h(z,x),f(x))\}$
48.	$R(h(h(b,a),z''),h(h(c,a),z''))$	21 přejmenování
49.	$R(b,h(h(c,a),f(a)))$	47,48,$\{x/a,z/b,z''/f(a),z'/h(h(c,a),f(a))\}$
50.	F	46,49,$\{y/a\}$