Matematická logika

Rostislav Horčík

horcik@math.feld.cvut.cz
horcik@cs.cas.cz
www.cs.cas.cz/~horcik

Existenční a univerzální uzávěr

Definice

Nechť $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ je formule a $x_1, \ldots, x_n$ jsou její volné proměnné (tj. proměnné, které mají volný výskyt ve φ). Pak sentence tvaru $\exists x_1 \cdots \exists x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ se nazývá existenční uzávěr formule φ a $\forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ univerzální uzávěr formule φ.

Definice

Nechť $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ je formule a **A** struktura. Pak $\mathbf{A} \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ právě tehdy, když $\mathbf{A} \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$.
Slovně řečeno, formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ je pravdivá (platí) ve struktuře **A** právě tehdy, když tam platí její univerzální uzávěr.

Tautologie, kontradikce, splnitelná formule

Definice

Mějme formuli φ. Struktura **A**, ve které je φ pravdivá, se nazývá model formule φ.

Definice

Formule φ se nazývá

- tautologie, jestliže je pravdivá v každé struktuře (každá struktura je model),
- splnitelná, jestliže je pravdivá alespoň v jedné struktuře (existuje model),
- nesplnitelná (kontradikce), jestliže je nepravdivá v každé struktuře (neexistuje model).

Příklady

- $(\forall x\ P(x)) \wedge \neg(\forall x\ P(x))$ je kontradikce (dosazení do výrokové kontradikce $p \wedge \neg p$),
- $\forall x \exists y\ Q(x, y)$ je splnitelná, protože platí v $\mathbf{N} = \langle \mathbb{N}, Q^{\mathbf{N}} \rangle$, kde $Q^{\mathbf{N}}$ je $<$, ale není tautologie, protože je nepravdivá ve struktuře $\mathbf{N}' = \langle \mathbb{N}, Q^{\mathbf{N}'} \rangle$, kde $Q^{\mathbf{N}'}$ je $>$.
- $(\forall x\ P(x)) \Rightarrow P(c)$ je tautologie (z $\mathbf{A} \models \forall x\ P(x)$ plyne, že $a \in P^{\mathbf{A}}$ pro každé $a \in A$, tudíž speciálně $c^{\mathbf{A}} \in P^{\mathbf{A}}$),
- $P(c) \Rightarrow (\exists x\ P(x))$ je tautologie.

Splnitelná množina a její model

Definice

Množina sentencí M se nazývá

- splnitelná, pokud existuje struktura $\mathbf{A}$, v níž jsou všechny sentence z M pravdivé. Takové interpretaci se říká model M.
- nesplnitelná, jestliže v každé struktuře existuje sentence z M, která je v ní nepravdivá.

Speciálně prázdná množina $\emptyset$ je splnitelná.

Příklady

Nechť P, Q jsou unární predikátové symboly a c konstatní symbol.

- $M = \{\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)), P(c), \exists x(\neg Q(x))\}$,
- $N = \{\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)), P(c), \neg(\exists x\ Q(x))\}$.

- M je splnitelná ve struktuře $\mathbf{A} = \langle\{a, b\}, P^{\mathbf{A}}, Q^{\mathbf{A}}\rangle$, kde $c^{\mathbf{A}} = a$, $P^{\mathbf{A}} = \{a\}$ a $Q^{\mathbf{A}} = \{a\}$.
- N není spnitelná, protože z prvních dvou formulí plyne, že a má vlastnost Q.

Sémantický důsledek

Definice

Řekneme, že formule φ je sémantickým důsledkem (konsekventem) množiny sentencí S, pokud každý model množiny S je také modelem univerzálního uzávěru formule φ. Značíme $S \models \varphi$.

Místo $\{\psi\} \models \varphi$ píšeme $\psi \models \varphi$ a místo $\emptyset \models \varphi$ píšeme $\models \varphi$.

Poznámka

V predikátové logice má symbol $\models$ více významů. Výše definovaný význam je analogický s významem $\models$ ve výrokové logice. Druhý význam je význam pravdivosti formule ve struktuře.

Vlastnosti sémantického důsledku

Tvrzení

Nechť M a S jsou množiny sentencí a φ formule.

- Je-li $\varphi \in S$, pak $S \models \varphi$.
- Je-li $M \subseteq S$ a $M \models \varphi$, pak $S \models \varphi$.
- Je-li φ tautologie, pak $N \models \varphi$ pro každou množinu sentencí N.
- Je-li $\models \varphi$, pak φ je tautologie.
- Je-li S nesplnitelná, pak $S \models \psi$ pro každou sentenci ψ.

Věta

Pro každou množinu sentencí S a každou sentenci φ platí:

$$S \models \varphi \text{ právě tehdy, když } S \cup \{\neg\varphi\} \text{ je nesplnitelná.}$$

Příklad

Mějme jazyk s konstatním symbolem 0, unárním funkčním symbolem f a binárním predikátovým symbolem $=$. Nechť

$$\Delta = \{\forall x(f(x) \neq 0), \forall x \forall y(f(x) = f(y) \ \Rightarrow \ x = y)\}\,.$$

Pak pro libovolné $n \geq 1$ platí

$$\Delta \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y(y \neq x_1 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ y \neq x_n)\,.$$

Ekvivalentní formule

Definice

Řekneme, že dvě formule φ, ψ jsou ekvivalentní (značení $\varphi \equiv \psi$), pokud $\varphi \Leftrightarrow \psi$ je tautologie.

Tvrzení

Nechť φ, ψ jsou sentence. Pak $\varphi \equiv \psi$ právě tehdy, když $\varphi \models\!\!\dashv \psi$ (tj. $\varphi \models \psi$ a $\psi \models \varphi$).

Věta

Nechť φ je formule, která obsahuje formuli α jako podformuli. Pokud $\alpha \equiv \beta$, pak $\varphi \equiv \psi$, kde ψ vzniklo z φ nahrazením formule α formulí β.

Příklady

Nechť Q je binární predikátový symbol. Pak

- $\forall x \forall y\ Q(x,y) \equiv \forall y \forall x\ Q(x,y)$,
- $\exists x \exists y\ Q(x,y) \equiv \exists y \exists x\ Q(x,y)$,
- ale neplatí $\forall x \exists y\ Q(x,y) \equiv \exists y \forall x\ Q(x,y)$.

Distribuce kvantifikátorů

Tvrzení

Nechť φ a ψ jsou formule a nechť x se nevyskytuje volně v ψ. Pak

- $(\neg\forall x\varphi) \equiv (\exists x\neg\varphi)$, $(\neg\exists x\varphi) \equiv (\forall x\neg\varphi)$,
- $(\psi \vee \forall x\varphi) \equiv \forall x(\psi \vee \varphi)$, $(\psi \vee \exists x\varphi) \equiv \exists x(\psi \vee \varphi)$,
- $(\psi \wedge \forall x\varphi) \equiv \forall x(\psi \wedge \varphi)$, $(\psi \wedge \exists x\varphi) \equiv \exists x(\psi \wedge \varphi)$,
- $(\psi \Rightarrow \forall x\varphi) \equiv \forall x(\psi \Rightarrow \varphi)$, $(\psi \Rightarrow \exists x\varphi) \equiv (\exists x(\psi \Rightarrow \varphi))$,
- $(\forall x\varphi \Rightarrow \psi) \equiv \exists x(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\exists x\varphi \Rightarrow \psi) \equiv \forall x(\varphi \Rightarrow \psi)$.

Substituce

- Označme $\varphi(x/t)$ formuli, která vznikne z formule φ nahrazením každého volného výskytu proměnné x termem t.
- Pokud platí $\forall x \varphi(x)$ nějaké interpretaci, tak by mělo platit $\varphi(x/t)$ pro libovolný term; podobně z platnosti $\varphi(x/t)$ by mělo plynout $\exists x \varphi(x)$.
- Takhle jednoduché to ale není! Např. pro $\varphi = \exists y(x < y)$ formule $\forall x \varphi(x)$ platí v **R**, ale $\varphi(x/y) = \exists y(y < y)$ je nepravdivá v **R**.

Definice

Řekneme, že term t je substituovatelný za proměnnou x ve formuli φ, jestliže žádný výskyt proměnné v termu t se substitucí nestane vázaným.

Přejmenování vázané proměnné

Tvrzení

Je-li term t substituovatelný za proměnnou x ve formuli φ, pak $\forall x \varphi \Rightarrow \varphi(x/t)$ a $\varphi(x/t) \Rightarrow \exists x \varphi$ jsou tautologie.

Tvrzení

Nechť y je proměnná substituovatelná za x ve formuli φ, která se ve φ nevyskytuje volně. Pak

$$\forall x \varphi \equiv \forall y \varphi(x/y)\,, \qquad \exists x \varphi \equiv \exists y \varphi(x/y)\,.$$

Prenexní normální tvar

Definice

Řekneme, že formule φ je v prenexním normálním tvaru, jestliže má tvar $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \, \alpha$, kde Q_i je některý z kvantifikátorů, $x_1, \dots, x_n$ jsou navzájem různé proměnné a α je otevřená formule.

věta

Každá predikátová formule φ je ekvivalentní s nějakou formulí v prenexním normálním tvaru $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \, \alpha$, tj.

$$\varphi \equiv Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \, \alpha \, .$$

Postup vytváření prenexního normálního tvaru

1. Přejmenujeme proměnné formule φ tak, aby každý kvantifikátor vázal jinou proměnnou.
2. Použijeme tautologie popisující distribuce kvantifikátorů přes jednotlivé logické spojky.

Uvažujme formuli, kde $R, \prec$ jsou binární predikátové symboly a K ternární:

$$\exists x\, R(x,y) \Rightarrow \forall x(\exists z\, K(z,x,y) \wedge \neg\forall z(z \prec x))\,,$$
$$\exists x\, R(x,y) \Rightarrow \forall u(\exists z\, K(z,u,y) \wedge \neg\forall v(v \prec u))\,,$$
$$\exists x\, R(x,y) \Rightarrow \forall u(\exists z\, K(z,u,y) \wedge \exists v\, \neg(v \prec u))\,,$$
$$\exists x\, R(x,y) \Rightarrow \forall u\exists z\exists v(K(z,u,y) \wedge \neg(v \prec u))\,,$$
$$\forall x\big(R(x,y) \Rightarrow \forall u\exists z\exists v(K(z,u,y) \wedge \neg(v \prec u))\big)\,,$$
$$\forall x\forall u\exists z\exists v\big(R(x,y) \Rightarrow (K(z,u,y) \wedge \neg(v \prec u))\big)\,.$$