Matematická logika

Rostislav Horčík

horcik@math.feld.cvut.cz
horcik@cs.cas.cz
www.cs.cas.cz/~horcik

Motivace

- Výroková logika studuje pouze vztahy mezi elementárními výroky (nikoli je samotné).
- Predikátová logika tyto elementární výroky dále strukturuje.
- Tudíž umožňuje zformalizovat některé úsudky nelze postihnout výrokovou logikou např.

$$\frac{\text{Sókratés je člověk.} \qquad \text{Každý člověk je smrtelný.}}{\text{Sókratés je smrtelný.}}$$

- Ve výrokové logice tento úsudek nelze zformalizovat, protože použité výroky spolu nesouvisí (úsudek by odpovídal tvrzení $\{p, q\} \models r$, které neplatí).
- Souvislost mezi výroky je třeba hledat uvnitř výroků.

Motivace

- Věta “Každý člověk je smrtelný.” má intuitivně tvar implikace. Říká, že každý objekt x, který je člověk, má vlastnost být smrtelný. Formálně
$$\forall x(\text{Člověk}(x) \Rightarrow \text{Smrtelný}(x))\,.$$

- Věta “Sókratés je člověk.” nám říká, že objekt “Sókratés” má vlastnost “být člověk”. Formálně
$$\text{Člověk}(\text{Sókratés})\,.$$

- Výše zmíněný úsudek nám tedy dává
$$\text{Smrtelný}(\text{Sókratés})\,.$$

Potřebné prvky jazyka

Logika, která umí postihnout úsudek se Sókratem (ale hlavně také usuzování matematiků), je logika predikátová (někdy také prvořádová).

Pokud chceme formalizovat výše uvedené věty, je zřejmé, že náš formální jazyk musí obsahovat následující položky:

- logické spojky ($\Rightarrow$)
- konstanty pro objekty (Sókratés),
- proměnné pro objekty (x),
- symboly pro vlastnosti (predikáty) jako "být člověk" a "být smrtelný",
- kvantifikátor "pro každé" ($\forall$).

Další příklad

Ukažme si jinou větu, kterou bychom rádi postihli jazykem predikátové logiky:

- Pro každé reálné číslo x existuje reálné číslo y takové, že $x = y + y$.
- Formání zápis
$$\forall x(\exists y(x = y + y)).$$

Nové prvky:

- kvantifikátor “existuje” ($\exists$),
- binární predikát “býti rovno” ($=$),
- funkční symbol $+$, který dvojici objektů x, y přiřazuje objekt $x + y$.

Jazyk predikátové logiky

Definice

Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$ se skládá z

1. logických symbolů
   - spočetné množiny objektových proměnných $\mathrm{Var} = \{x, y, z, \ldots\}$,
   - výrokových logických spojek $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$,
   - obecného (univerzálního) kvantifikátoru $\forall$ a existečního kvantifikátoru $\exists$,
2. speciálních (mimologických) symbolů
   - množiny predikátových symbolů $\mathcal{R} = \{P, Q, R, \ldots\}$,
   - množiny konstatních symbolů $\mathcal{C} = \{a, b, c, \ldots\}$,
   - množiny funkčních symbolů $\mathcal{F} = \{f, g, h, \ldots\}$,
3. pomocných symbolů: závorky a čárka.

Každý predikátový a funční symbol má danou aritu (četnost).

Termy

Definice

Množina ($\mathcal{L}$-)termů jazyka $\mathcal{L}$ je definována těmito pravidly:

1. Každá proměnná a každý konstatní symbol je term.
2. Jestliže f je funkční symbol arity n a $t_1, \dots, t_n$ jsou termy, pak $f(t_1, \dots, t_n)$ je také term.
3. Nic, co nevzniklo konečným použitím 1 a 2, není term.

Příklady

Mejmě jazyk obsahující unární funkční symbol f, binární funkční symbol $+$ a konstatní symbol 0. Pak následující jsou termy:

- $x + 0$ (píšeme $x + y$ místo $+(x, y)$),
- $0 + (0 + (0 + 0))$,
- $f(f(x) + f(0 + 0))$.

Formule

Definice

Atomická ($\mathcal{L}$-)formule je predikátový symbol P aplikovaný na tolik termů, kolik je jeho arita. Tj. pro n-ární $P \in \mathcal{R}$ a termy $t_1, \ldots, t_n$ je $P(t_1, \ldots, t_n)$ atomická formule.

Definice

Množina ($\mathcal{L}$-)formulí je definována těmito pravidly:

1. Každá atomická formule je formule.
2. Jsou-li φ a ψ dvě formule, pak $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ jsou opět formule.
3. Je-li φ formule a x proměnná, pak $(\forall x \varphi)$ a $(\exists x \varphi)$ jsou opět formule.
4. Nic, co nevzniklo konečným použitím 1 až 3, není formule.

Další terminologie

Konvence

Ohledně psaní závorek budeme používat stejné konvence jako ve výrokové logice. Navíc místo $Q_1 x_1 (Q_2 x_2 \varphi)$ budeme psát jen $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \varphi$, kde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$.

Definice

Podřetězec formule φ, který odpovídá podstromu derivačního stromu φ určeného vrcholem s predikátovým symbolem, logickou spojkou nebo kvantifikátorem, se nazývá podformulí formule φ.

Definice

Mějme formuli φ a proměnnou x, která se vyskytuje ve φ.

- Výskyt proměnné x je vázaný ve φ, jestliže se x vyskytuje v nějaké podformuli formule φ tvaru $(\exists x \psi)$ nebo $(\forall x \psi)$.
- V opačném případě mluvíme o volném výskytu.

Uvažujme formuli v jazyku s unárním funčním symbolem f, binárním funkčním symbolem $+$ a binárními predikátovými symboly $<, =$

$$\exists x(x < y \ \wedge \ \forall y(z + f(y) = x))\,.$$

- výskyt proměnné z je volný,
- všechny tři výskyty proměnné x jsou vázané,
- proměnná y má první výskyt volný a druhý vázaný.

Sentence a otevřené formule

Definice

- Pokud má formule φ pouze vázané výskyty proměnných, pak se nazývá sentence (uzavřená formule).
- Pokud má formule φ pouze volné výskyty proměnných, pak se nazývá otevřená formule.

Příklady

- $\forall z \forall y \exists x (x < y \ \wedge \ \forall y (z + f(y) = x))$ je sentence,
- $x < y \ \wedge \ z + f(y) = x$ je otevřená formule,
- $\exists x (x < y \ \wedge \ \forall y (z + f(y) = x))$ není ani uzavřená ani otevřená,
- $0 < f(f(0))$ je uzavřená i otevřená.

Značení

- Formuli φ s volnými proměnnými $x_1, \dots, x_n$ budeme značit $\varphi(x_1, \dots, x_n)$.
- Mějme termy $t_1, \dots, t_n$. Pak $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ označuje formuli, kde je každý volný výskyt proměnné x_i nahrazen termem t_i.
- Pokud $\varphi(x, y)$ je $\exists z(x + y < z)$, pak např. $\varphi(0, f(0) + y)$ označuje formuli $\exists z(0 + (f(0) + y) < z)$.
- Kdykoliv budeme tuto notaci používat, budeme vždy předpokládat, že žádný z termů t_i neobsahuje proměnnou, která má vázaný výskyt ve φ. Např. když $\varphi(x)$ je $\exists y \neg(x = y)$, pak není dovolené psát $\varphi(y)$.

Sémantika predikátové logiky

Co je tedy třeba k určení významu predikátové formule?

$$\forall x(\text{Člověk}(x) \Rightarrow \text{Smrtelný}(x))\,,$$
$$\forall x(\exists y(x = y + y))\,.$$

- Určit odkud jsou objekty (u příkladu se Sókratem to mohla být např. množina všech bytostí ve vesmíru, u příkladu s reálnými čísly to byly reálná čísla).
- Vymezit objekty (n-tice objektů), které mají dané vlastnosti (např. které objekty jsou člověk nebo která dvě reálná čísla jsou si rovna).
- Určit význam konstant a funkčních symbolů (např. $+$ reprezentuje sčítání reálných čísel).
- Určit význam logických spojek a kvantifikátorů.

Struktury

Definice

Mějme jazyk $\mathcal{L} = \mathcal{R} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{F}$. Struktura pro jazyk $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$-struktura) je neprázdná množina A (universum) spolu se zobrazením $[\![-]\!]$, které splňuje následující body:

1. každému predikátovému symbolu $P \in \mathcal{R}$ arity n přiřazuje podmnožinu $[\![P]\!]$ množiny A^n, tj. n-ární relaci na množině A,
2. každému konstatnímu symbolu $a \in \mathcal{C}$ přiřazuje prvek $[\![a]\!]$ z A,
3. každému funkčnímu symbolu $f \in \mathcal{F}$ arity n přiřazuje zobrazení $[\![f]\!] \colon A^n \to A$.
4. Pokud máme v $\mathcal{R}$ symbol $=$, pak $[\![=]\!] = \{(a, a) \mid a \in A\}$.

Příklady interpretací

Příklad

Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ s binárním predikátovým symbolem H, konstatním symbolem 0. $\mathcal{L}$-struktura je např. dvojice $\langle A, [\![-]\!]\rangle$, kde $A = \{a, b, c, d\}$, $[\![0]\!] = c$, $[\![H]\!] = \{(a, b), (a, c), (b, c), (c, d), (d, a), (d, b)\}$.

Konvence

$\mathcal{L}$-struktury budeme zkráceně označovat tučnou variantou téhož písmene, kterým je označeno universum. Dále místo interpretace $[\![P]\!]$ ve struktuře $\mathbf{A}$ pro $P \in \mathcal{L}$ budeme psát $P^{\mathbf{A}}$. Pokud je jazyk $\mathcal{L}$ konečný, budeme strukturu psát jako n-tici. Např. pro strukturu z příkladu nahoře:

$$\mathbf{A} = \langle A, H^{\mathbf{A}}, 0^{\mathbf{A}}\rangle .$$

Příklad

Mějme jazyk $\mathcal{L}$ s binárními predikáty $\leq, =$, binárními funkčními symboly $+, \cdot$ a dvěmi konstantami $0, 1$. $\mathcal{L}$-struktura je např. $\mathbf{R} = \langle \mathbb{R}, +^{\mathbf{R}}, \cdot^{\mathbf{R}}, 0^{\mathbf{R}}, 1^{\mathbf{R}}, \leq^{\mathbf{R}} \rangle$, kde

$$
\begin{aligned}
\leq^{\mathbf{R}} &= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \text{ je menší nebo rovno } b\}\,, \\
0^{\mathbf{R}} &= \text{reálné číslo nula}\,, \\
1^{\mathbf{R}} &= \text{reálné číslo jedna}\,, \\
+^{\mathbf{R}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} & \quad \text{sčítání reálných čísel}\,, \\
\cdot^{\mathbf{R}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} & \quad \text{násobení reálných čísel}\,.
\end{aligned}
$$

R budeme nazývat struktura reálných čísel.

V případech, jako je tento, kdy aritmetické symboly mají “obvyklý” význam, si dovolíme nedůslednost a budeme psát $\mathbf{R} = \langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq \rangle$.

Hodnota termu ve struktuře

Definice

Mějme strukturu **A** a t term bez proměnných. Pak jeho hodnotu $t^{\mathbf{A}}$ takto:

- Je-li term t konstatní symbol $c \in \mathcal{C}$, pak jeho hodnota je $t^{\mathbf{A}} = c^{\mathbf{A}}$.
- Je-li $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ pro $f \in \mathcal{F}$ a t_i termy, pak jeho hodnota je $t^{\mathbf{A}} = f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}, \ldots, t_n^{\mathbf{A}})$.

Příklad

Nechť **R** je struktura reálných čísel z minulého slidu a $t = (1 + 1) \cdot (1 + (1 + 0))$. Pak $t^{\mathbf{R}} = 4$.

Pravdivostní hodnota sentence ve struktuře

Definice

Nechť **A** je struktura. Budeme induktivně definovat pravdivost sentence φ ve struktuře **A**. Značení $\mathbf{A} \models \varphi$.

- Nechť $\varphi = P(t_1, \dots, t_n)$ je atomická sentence. Pak $\mathbf{A} \models \varphi$ pokud, $(t_1^{\mathbf{A}}, \dots, t_n^{\mathbf{A}}) \in P^{\mathbf{A}}$.
- Nechť $\varphi = \neg\psi$. Pak $\mathbf{A} \models \varphi$ právě tehdy, když $\mathbf{A} \not\models \psi$ (tj. ψ je nepravdivá).
- Nechť $\varphi = \psi \wedge \chi$. Pak $\mathbf{A} \models \varphi$ právě tehdy, když $\mathbf{A} \models \psi$ a $\mathbf{A} \models \chi$.
- Nechť $\varphi = \psi \vee \chi$. Pak $\mathbf{A} \models \varphi$ právě tehdy, když $\mathbf{A} \models \psi$ nebo $\mathbf{A} \models \chi$.
- Nechť $\varphi = \psi \Rightarrow \chi$. Pak $\mathbf{A} \not\models \varphi$ právě tehdy, když $\mathbf{A} \models \psi$ a $\mathbf{A} \not\models \chi$.
- Nechť $\varphi = \psi \Leftrightarrow \chi$. Pak $\mathbf{A} \models \varphi$ právě tehdy, když ψ a χ jsou buď obě pravdivé nebo nepravdivé.

Pravdivostní hodnota sentence (pokračování)

Definice

Nechť $\mathcal{L}$ je jazyk a $\mathbf{A}$ je $\mathcal{L}$-struktura. Pak $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$ je jazyk, který vznikne z $\mathcal{L}$ přidáním konstatních symbolů pro každý prvek A, tj.
$\mathcal{L}_{\mathbf{A}} = \mathcal{L} \cup \{c_a \mid a \in A\}$.
Symbolem $\mathbf{A}_C$ pak označujeme $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$-strukturu, která vznikne z $\mathbf{A}$ interpretací $[\![c_a]\!] = a$. Symboly c_a, a budeme občas ztotožňovat.

Definice

- Nechť $\varphi = \forall x \psi(x)$. Pak $\mathbf{A} \models \varphi$ právě tehdy, když pro všechny $a \in A$ platí $\mathbf{A}_C \models \psi(c_a)$.
- Nechť $\varphi = \exists x \psi(x)$. Pak $\mathbf{A} \models \varphi$ právě tehdy, když existuje $a \in A$ platí $\mathbf{A}_C \models \psi(c_a)$.
- Pokud ψ neobsahuje x volně, pak $\mathbf{A} \models \varphi$ právě tehdy, když $\mathbf{A} \models \psi$.

Příklady

1. Mějme strukturu $\mathbf{A} = \langle A, R^{\mathbf{A}} \rangle$, kde $A = \{p, q, r\}$ a $R^{\mathbf{A}} = \{(p, q), (p, r), (q, r)\}$.
2. Pak $\mathbf{A} \not\models \exists x\, R(x, x)$ a $\mathbf{A} \models \neg\exists x\, R(x, x)$.
3. Dále $\mathbf{A} \models \forall x \forall y \forall z((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. Mějme strukturu reálných čísel $\mathbf{R} = \langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq \rangle$ a podobně strukturu celých čísel $\mathbf{Z} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1, \leq \rangle$.
5. Pak $\mathbf{R} \models \forall x \exists y(x = y + y)$, ale $\mathbf{Z} \not\models \forall x \exists y(x = y + y)$