Matematická logika
2. přednáška

Rostislav Horčík

horcik@math.feld.cvut.cz
horcik@cs.cas.cz
www.cs.cas.cz/~horcik

Zobrazení

Definice

Mějme množiny A, B. Binární relace $f \subseteq A \times B$ se nazývá zobrazení množiny A do množiny B, pokud

1. pro každé $a \in A$ existuje $b \in B$ takové, že $(a, b) \in f$,
2. pro každé $a \in A$ a $b, c \in B$ t.ž. $(a, b) \in f$ a $(a, c) \in f$ platí $b = c$.

- Fakt, že f je zobrazení množiny A do množiny B se značí $f: A \to B$.
- Jestliže $(a, b) \in f$, jednoznačná hodnota b se označuje $f(a)$.

Vzájemně jednoznačné zobrazení

Definice

Mějme zobrazení $f\colon A \to B$.

- f se nazývá prosté, pokud $f(x) \neq f(y)$ pro $x \neq y$.
- f se nazývá na, pokud pro každé $y \in B$ existuje $x \in A$ takové, že $f(x) = y$.
- f se nazývá bijekce, pokud je prosté a na.

Poznámky

- Ke každé bijekci $f\colon A \to B$, existuje $f^{-1}\colon B \to A$.
- Složení dvou prostých zobrazení (bijekcí) je opět prosté (bijekce).

Mohutnost

Definice

Řekneme, že dvě množiny A, B mají stejnou mohutnost, jestliže existuje bijekce $f\colon A \to B$. Tento fakt značíme $|A| = |B|$.

Tvrzení

Nechť A je množina. Pak

- $|A| = |A|$.
- Když $|A| = |B|$, pak $|B| = |A|$.
- Když $|A| = |B|$ a $|B| = |C|$, pak $|A| = |C|$.

Definice

Nechť A a B jsou množiny. Řekneme, že A má nanejvýš stejnou mohutnost jako B, když existuje prosté zobrazení $f\colon A \to B$. Tento fakt značíme $|A| \leq |B|$. Pokud navíc $|A| \neq |B|$, píšeme $|A| < |B|$.

Tvrzení

Nechť A, B, C jsou množiny. Pak

- $|A| \leq |A|$.
- Když $|A| \leq |B|$ a $|B| \leq |C|$, pak $|A| \leq |C|$.
- Pokud $A \subseteq B$, pak $|A| \leq |B|$.

Věta (Cantor-Bernstein)

Nechť A, B jsou množiny. Když $|A| \leq |B|$ a $|B| \leq |A|$, pak $|A| = |B|$.

Spočetné a nespočetné množiny

Definice

Mějme množinu A.

- Řekneme, že A je konečná, pokud $|A| = |\{1, \ldots, n\}|$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$.
- Řekneme, že A je spočetná, pokud $|A| = |\mathbb{N}|$.
- Jestliže A je nekonečná a není spočetná, řekneme, že je nespočetná.
- Pro množinu, která je buď spočetná nebo konečná, se často používá termín nejvýše spočetná množina.

Tvrzení

Množina A je spočetná právě tehdy, když ji lze uspořádat do prosté někonečné posloupnosti.

Příklady spočetných množin

Následující množiny jsou spočetné:

- Množina celých čísel $\mathbb{Z}$.
- $A \times B$ pro spočetné množiny A a B.
- Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$.
- Mějme neprázdnou množinu A, která je nejvýše spočetná. Množina A^* všech konečných posloupností prvků z A, je spočetná.

Cantorova diagonální metoda

Věta (Cantor)

Pro každou množinu A platí $|A| < |P(A)|$.

Důsledky

- $P(\mathbb{N})$ je nespočetná.
- Množina reálných čísel $\mathbb{R}$ je nespočetná.